

Sinus et cosinus : le cours

Les fonctions sinus et cosinus décrivent tout ce qui se répète :

- la position d'une nacelle sur une grande roue ;
- les marées ;
- les ondes sonores ;
- le courant électrique.

Elles sont **périodiques** : elles retrouvent les mêmes valeurs à intervalles réguliers. Au bac, elles servent pour des études de fonctions, des équations, des limites et des encadrements.

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Les **valeurs remarquables** (partie 2) et les **formules** (partie 3) sont à connaître par cœur.
- Pour toute équation trigonométrique, la solution générale a $+2k\pi$: l'oublier, c'est perdre presque tous les points.

1. Radians et cercle trigonométrique

On mesure les angles en **radians** : π radians correspondent à 180° . Pour convertir : $x^\circ = x \times \frac{\pi}{180}$ radians.

Sur le cercle trigonométrique (rayon 1), le point M associé au réel x a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$.

Relation fondamentale :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Encadrement :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

2. Les valeurs remarquables

- $x = 0$: $\cos = 1$, $\sin = 0$.
- $x = \frac{\pi}{6}$: $\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin = \frac{1}{2}$.
- $x = \frac{\pi}{4}$: $\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $x = \frac{\pi}{3}$: $\cos = \frac{1}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos = 0$, $\sin = 1$.
- $x = \pi$: $\cos = -1$, $\sin = 0$.

Astuce mnémotechnique : pour le sinus de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, on retient :

$$\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$$

c'est-à-dire : $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$. Le cosinus lit la même liste à l'envers.

3. Les formules à connaître

Parité et périodicité :

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

Angles associés :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

Addition :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Et les mêmes avec $a - b$, en changeant les signes qui s'imposent.

Duplication :

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

Linéarisation :

- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

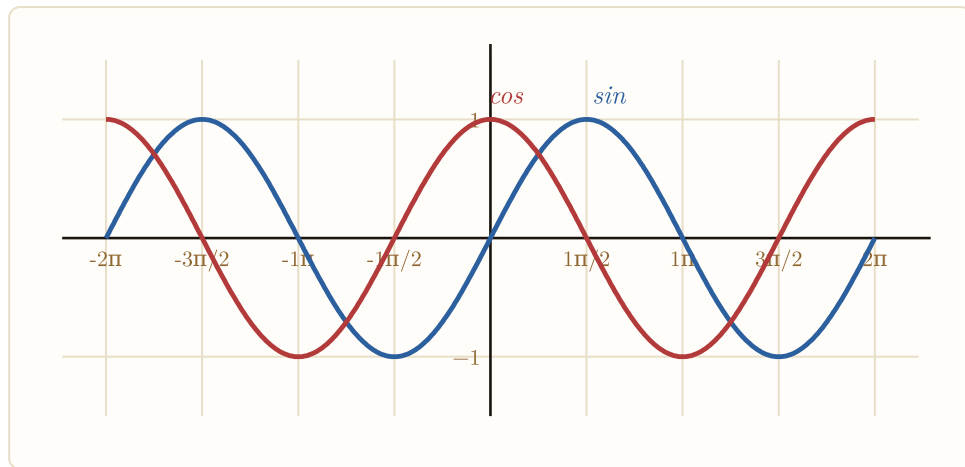
Pièges :

- $\cos(a + b) \neq \cos a + \cos b$: il n'y a jamais de formule aussi simple.
- Confondre $\cos(\pi - x) = -\cos x$ avec $\sin(\pi - x) = \sin x$: l'un change de signe, pas l'autre.
- $\cos^2 x$ signifie $(\cos x)^2$, et non $\cos(x^2)$.

Les formules d'addition sont comme les mots de passe : on ne les invente pas, on les apprend.

4. Les fonctions cosinus et sinus

$\cos$ et $\sin$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, 2π -périodiques. $\cos$ est **paire**, $\sin$ est **impair**.



Les courbes de $\cos$ et de $\sin$: périodiques de période 2π , bornées par -1 et 1

Dérivées :

- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\sin x)' = \cos x$

Pour une composée :

- $(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b)$
- $(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$

Variations :

- sur $[0; \pi]$, $\cos$ décroît de 1 à -1 ;
- sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\sin$ croît de -1 à 1 .

La fonction $x \mapsto \cos(\omega x)$ ($\omega > 0$) est périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

5. Limites et nombres dérivés

$\cos$ et $\sin$ n'ont **pas de limite** en $+\infty$ ni en $-\infty$: elles oscillent. On encadre avec $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$, puis on utilise les gendarmes.

Limites en 0 :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (nombre dérivé de $\sin$ en 0 , égal à $\cos 0$)
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ (nombre dérivé de $\cos$ en 0 , égal à $-\sin 0$)

Piège : ne jamais écrire « $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = \dots$ » : cette limite n'existe pas.

Astuce : pour une limite comme $\frac{\sin(3x)}{x}$ en 0, écris :

$$\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x}$$

et utilise $\frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$.

6. Réduire l'intervalle d'étude

- Si f est **T -périodique**, il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur T (par exemple $[0; T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$). On complète par translations.
- Si f est **paire**, on étudie sur la moitié positive. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est **impair**, la courbe est symétrique par rapport à l'origine.
- Pour une étude sur $\mathbb{R}$, on combine : périodicité de 2π et imparité, par exemple, ramènent à $[0; \pi]$.

7. Les équations trigonométriques

Théorème. Pour tous réels x et a :

- $\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;
- $\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Méthode :

1. Ramène l'équation à $\cos x = \cos a$ ou $\sin x = \sin a$, en reconnaissant une valeur remarquable.
2. Écris la solution générale avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. Sélectionne les solutions de l'intervalle demandé en donnant des valeurs à k .
4. Pour une équation du second degré en $\cos x$ (ou $\sin x$), pose $X = \cos x$ avec $-1 \leq X \leq 1$.

Exemple. Résoudre $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $] -\pi; \pi]$. Comme $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$:

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$\text{Dans }] -\pi; \pi] : x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3}.$$

Pièges :

- Oublier $+2k\pi$ quand on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$.
- Oublier la **deuxième famille** de solutions ($-a$ ou $\pi - a$).
- Garder une valeur $X = \cos x$ **supérieure à 1 ou inférieure à -1** : elle est impossible.

Une équation trigonométrique n'a jamais une seule solution : quand tu n'en trouves qu'une, c'est qu'il en manque une.

8. Les inéquations trigonométriques

On résout d'abord l'équation associée.

On place les solutions sur le cercle trigonométrique (ou sur la courbe).

Puis on lit les arcs où l'inégalité est vraie.

Exemple : $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $] -\pi ; \pi]$. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\pm \frac{\pi}{4}$. $\cos$ est supérieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ entre les deux. Donc $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

9. Convexité et inégalités

$\cos'' = -\cos$ et $\sin'' = -\sin$. Donc $\sin$ est concave sur $[0 ; \pi]$ ($\sin \geq 0$) et convexe sur $[\pi ; 2\pi]$. Les points d'abscisse $k\pi$ sont des points d'inflexion de $\sin$.

Pour $x \geq 0$:

- $\sin x \leq x$
- $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$
- $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$

On les démontre par des études de fonctions successives, chaque dérivée redonnant la précédente inégalité.

10. Les 10 pépites du chapitre

1. **Sécurité radians** : vérifie que ta calculatrice est en radians, pas en degrés.
2. **Cercle trigonométrique** : dessine-le pour chaque équation ou inéquation.
3. $+2k\pi$, **toujours**, pour les solutions sur $\mathbb{R}$.
4. Pour une **équation du second degré en cos ou sin**, pose $X = \cos x$ et écarte $|X| > 1$.
5. $\cos^2 + \sin^2 = 1$ pour passer de l'un à l'autre (avec le signe donné par l'intervalle).
6. **Linéariser** $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ avec $\cos 2x$: indispensable avant de chercher une primitive.
7. **Parité et périodicité** réduisent l'étude d'une fonction de moitié ou plus.
8. **Gendarmes** : $-1 \leq \sin \leq 1$ pour toute limite avec un **sin** ou un **cos**.
9. $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ en 0 : ramène toute limite à cette forme en factorisant.
10. **Vérifie** avec une valeur simple : $\cos 0 = 1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \pi = -1$.

11. Ce qui peut tomber au bac

- Des **valeurs, formules et équations trigonométriques** (fiche 1).
- Des **études de fonctions trigonométriques** avec parité, périodicité et extremums (fiche 2).
- Des **limites, encadrements et suites** avec **sin** et **cos** (fiche 3).

Tu as maintenant le cours. Passe aux trois fiches, aux exercices type bac, puis au Guide de rédaction du chapitre.