

Sinus et cosinus : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- un problème d'aire maximale avec un trapèze inscrit dans un demi-cercle ;
- l'étude de $x - 2 \sin x$ avec équation à solution unique et tangente ;
- l'équation $\cos x = x$ avec une suite définie par $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- dérivabilité justifiée ;
- formule citée ;
- signe justifié sur l'intervalle ;
- tableau complet ;
- théorèmes nommés ;
- conclusion en contexte.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Vérifie que ta calculatrice est en **radians** avant de calculer une valeur approchée.
- Si tu bloques sur une question, écris « on admet que... » et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : un trapèze d'aire maximale dans un demi-cercle

Dans un repère orthonormé, on considère le demi-cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1, situé dans le demi-plan des ordonnées positives, de diamètre $[AB]$ avec $A(-1;0)$ et $B(1;0)$.

Pour $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on note M le point du demi-cercle de coordonnées $(\cos \theta; \sin \theta)$ et M' le point de coordonnées $(-\cos \theta; \sin \theta)$. On note $\mathcal{A}(\theta)$ l'aire du trapèze $ABMM'$.

1. Montrer que $\mathcal{A}(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin \theta$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\mathcal{A}'(\theta) = (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$.
3. Dresser le tableau de variations de $\mathcal{A}$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
4. Pour quelle valeur de θ l'aire du trapèze est-elle maximale ? Quelle est cette aire maximale ?

Exercice 2 : $x - 2\sin x$, tangente et équation à solution unique

Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = x - 2\sin x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Étudier la convexité de f sur $[0; \pi]$.
3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $[0; \pi]$, dont 0, et que l'autre, notée α , appartient à $]1,8; 1,9[$.

Exercice 3 : l'équation $\cos x = x$ et une suite

Partie A.

Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = \cos x - x$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$, et que $0,73 < \alpha < 0,74$.

Partie B.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

2. Démontrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer u_1 , u_2 et u_3 (valeurs approchées). La suite (u_n) est-elle monotone ?
4. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ . Montrer que $\ell = \alpha$.
5. Écrire un script Python qui affiche u_1 à u_8 et interpréter les valeurs obtenues.

Les réflexes à retenir

- Un problème géométrique se ramène à une **fonction d'une variable** (ici θ), dont on étudie les variations, puis on **conclut en contexte**.
- Pour le signe d'une dérivée trigonométrique, **précise l'intervalle** et cite la monotonie du cosinus ou du sinus sur cet intervalle.
- Une équation $f(x) = 0$ avec une solution évidente ($x = 0$) et une autre à trouver se traite **par intervalles de monotonie**.
- Pour une suite $u_{n+1} = \cos(u_n)$, la limite se trouve par **continuité**, et c'est l'**unicité** de la solution qui l'identifie.
- **Radians** pour toutes les valeurs approchées.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les études de fonctions trigonométriques des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.