

Sinus et cosinus : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- un problème d'aire maximale avec un trapèze inscrit dans un demi-cercle ;
- l'étude de $x - 2 \sin x$ avec équation à solution unique et tangente ;
- l'équation $\cos x = x$ avec une suite définie par $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- dérivabilité justifiée ;
- formule citée ;
- signe justifié sur l'intervalle ;
- tableau complet ;
- théorèmes nommés ;
- conclusion en contexte.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Vérifie que ta calculatrice est en **radians** avant de calculer une valeur approchée.
- Si tu bloques sur une question, écris « on admet que... » et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : un trapèze d'aire maximale dans un demi-cercle

Dans un repère orthonormé, on considère le demi-cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 1, situé dans le demi-plan des ordonnées positives, de diamètre $[AB]$ avec $A(-1;0)$ et $B(1;0)$.

Pour $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on note M le point du demi-cercle de coordonnées $(\cos \theta; \sin \theta)$ et M' le point de coordonnées $(-\cos \theta; \sin \theta)$. On note $\mathcal{A}(\theta)$ l'aire du trapèze $ABMM'$.

1. Montrer que $\mathcal{A}(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin \theta$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\mathcal{A}'(\theta) = (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$.
3. Dresser le tableau de variations de $\mathcal{A}$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
4. Pour quelle valeur de θ l'aire du trapèze est-elle maximale ? Quelle est cette aire maximale ?

Correction de la question 1

Le trapèze $ABMM'$ a deux bases parallèles à l'axe des abscisses :

- $[AB]$, de longueur $AB = 2$;
- $[M'M]$, de longueur $MM' = 2 \cos \theta$ (les points M et M' ont pour abscisses $\cos \theta$ et $-\cos \theta$, avec $\cos \theta > 0$).

Sa hauteur est la distance entre ces deux bases, c'est-à-dire l'ordonnée commune $\sin \theta$.

$$\mathcal{A}(\theta) = \frac{1}{2} \times (AB + MM') \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} \times (2 + 2 \cos \theta) \times \sin \theta$$

$$\mathcal{A}(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin \theta$$

Correction de la question 2

La fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ comme produit de $\theta \mapsto 1 + \cos \theta$ et de $\theta \mapsto \sin \theta$, dérivables sur $\mathbb{R}$.

On applique $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(\theta) = 1 + \cos \theta$, $u'(\theta) = -\sin \theta$, $v(\theta) = \sin \theta$, $v'(\theta) = \cos \theta$.

Pour tout θ :

$$\mathcal{A}'(\theta) = -\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta = -(1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta + \cos^2 \theta = 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1$$

On factorise $2X^2 + X - 1 = (2X - 1)(X + 1)$ avec $X = \cos \theta$.

$$\mathcal{A}'(\theta) = (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$$

Correction de la question 3

Sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, $\cos \theta > 0$, donc $\cos \theta + 1 > 0$. Le signe de $\mathcal{A}'(\theta)$ est celui de $2 \cos \theta - 1$.

$2 \cos \theta - 1 > 0 \iff \cos \theta > \frac{1}{2} \iff \theta < \frac{\pi}{3}$. (Sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, le cosinus est strictement décroissant et $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.)

Donc $\mathcal{A}' > 0$ sur $]0; \frac{\pi}{3}[$, $\mathcal{A}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ et $\mathcal{A}' < 0$ sur $]\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}[$.

Tableau de variations. $\mathcal{A}$ est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{3}[$ (de la limite 0 en 0 à $\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{3}\right)$). Puis strictement décroissante sur $]\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}[$ (de $\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ à la limite $\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$).

$$\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,30$$

Correction de la question 4

D'après le tableau de variations, $\mathcal{A}$ admet un maximum en $\theta = \frac{\pi}{3}$, égal à $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

L'aire du trapèze est maximale pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire lorsque M a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Cette aire maximale vaut $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,30$ unités d'aire.

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : les deux bases et la hauteur sont identifiées avec les coordonnées de M et M' , la formule de l'aire du trapèze est citée.
- **Q2** : dérivabilité justifiée, formule $(uv)'$ citée, utilisation de $\sin^2 = 1 - \cos^2$, factorisation d'un trinôme en $\cos \theta$.
- **Q3** : signe justifié ($\cos \theta + 1 > 0$; $2 \cos \theta - 1 > 0 \iff \theta < \frac{\pi}{3}$), tableau avec la valeur du maximum et le comportement aux bornes.
- **Q4** : conclusion en contexte, avec la valeur de θ , la position de M et l'aire.

Exercice 2 : $x - 2 \sin x$, tangente et équation à solution unique

Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = x - 2 \sin x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
2. Étudier la convexité de f sur $[0; \pi]$.
3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $[0; \pi]$, dont 0, et que l'autre, notée α , appartient à $]1,8; 1,9[$.

Correction de la question 1

La fonction f est dérivable sur $[0; \pi]$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout x :

$$f'(x) = 1 - 2 \cos x$$

$f'(x) > 0 \iff \cos x < \frac{1}{2} \iff x > \frac{\pi}{3}$. (Sur $[0; \pi]$, le cosinus est strictement décroissant et $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.)

Donc $f' < 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, $f' \left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ et $f' > 0$ sur $\left]\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Tableau de variations. f est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, de $f(0) = 0$ à $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0,69$. Puis strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, de $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ à $f(\pi) = \pi$.

Le minimum de f est $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$.

Correction de la question 2

La fonction f' est dérivable sur $[0; \pi]$ et $f''(x) = 2 \sin x$. Sur $[0; \pi]$, $\sin x \geq 0$, donc $f''(x) \geq 0$.

Donc f est convexe sur $[0; \pi]$.

Sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Correction de la question 3

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 1 - 2 \cos 0 = -1$. La tangente en 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$.

$T : y = -x$

Comme f est convexe sur $[0; \pi]$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de $T : f(x) \geq -x$ pour $x \in [0; \pi]$.

Correction de la question 4

Sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

f est strictement décroissante et $f(0) = 0$. Donc $f(x) < 0$ pour $x \in \left]0; \frac{\pi}{3}\right]$, et $f(x) = 0$ seulement pour $x = 0$.

Sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

f est continue et strictement croissante, de $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -0,69 < 0$ à $f(\pi) = \pi > 0$.

Le nombre 0 est strictement compris entre ces valeurs.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left] \frac{\pi}{3}; \pi \right[$.

Comme $f(x) = 0$ n'a pas d'autre solution sur $\left[0; \frac{\pi}{3} \right]$ que 0 :

l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $[0; \pi]$: 0 et α .

Encadrement

$$f(1,8) = 1,8 - 2 \sin 1,8 \approx -0,148 < 0$$

$$f(1,9) = 1,9 - 2 \sin 1,9 \approx 0,007 > 0$$

Comme f est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi \right]$:

$$1,8 < \alpha < 1,9$$

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : dérivée, résolution de $\cos x < \frac{1}{2}$ sur $[0; \pi]$ avec la décroissance du cosinus, tableau avec valeurs.
- **Q2** : f'' calculée, signe de $\sin x$ sur $[0; \pi]$ justifié.
- **Q3** : $f(0)$ et $f'(0)$ calculés avant l'équation, position par convexité.
- **Q4** : décomposition en deux intervalles, $x = 0$ traité séparément, corollaire du TVI cité avec ses hypothèses, encadrement justifié par deux valeurs.

Exercice 3 : l'équation $\cos x = x$ et une suite

Partie A.

Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = \cos x - x$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$, et que $0,73 < \alpha < 0,74$.

Partie B.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

2. Démontrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer u_1 , u_2 et u_3 (valeurs approchées). La suite (u_n) est-elle monotone ?
4. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ . Montrer que $\ell = \alpha$.
5. Écrire un script Python qui affiche u_1 à u_8 et interpréter les valeurs obtenues.

Correction de la question 1

La fonction g est dérivable sur $[0; 1]$ comme différence de fonctions dérivables, donc continue. Pour tout $x \in [0; 1]$: $g'(x) = -\sin x - 1$. Comme $\sin x \geq 0$ sur $[0; 1]$, $g'(x) \leq -1 < 0$.

g est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

De plus $g(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$. Et $g(1) = \cos 1 - 1 \approx -0,46 < 0$ (car $\cos 1 < 1$). Donc 0 est compris entre $g(1)$ et $g(0)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$, et $\alpha \in]0; 1[$.

Encadrement

$$g(0,73) = \cos 0,73 - 0,73 \approx 0,015 > 0$$

$$g(0,74) = \cos 0,74 - 0,74 \approx -0,0015 < 0$$

Comme g est strictement décroissante :

$$0,73 < \alpha < 0,74$$

Correction de la question 2

Soit $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq 1$ ».

Initialisation.

$u_0 = 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité.

Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $0 \leq u_k \leq 1$ (hypothèse de récurrence).

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0; \pi] \supset [0; 1]$.

Donc $\cos 1 \leq \cos u_k \leq \cos 0$, soit $\cos 1 \leq u_{k+1} \leq 1$.

Comme $1 < \frac{\pi}{2}$, $\cos 1 > 0$.

Donc $0 \leq u_{k+1} \leq 1 : P(k+1)$ est vraie.

Conclusion.

$0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de la question 3

$$u_1 = \cos 1 \approx 0,5403$$

$$u_2 = \cos(0,5403) \approx 0,8576$$

$$u_3 = \cos(0,8576) \approx 0,6543$$

On a $u_1 < u_0$, puis $u_2 > u_1$, puis $u_3 < u_2$: la suite descend, monte, descend.

Elle n'est pas monotone.

C'est normal : la fonction cosinus est décroissante sur $[0; 1]$, donc les termes alternent de part et d'autre de la solution.

Correction de la question 4

La suite (u_n) converge vers ℓ . D'après la question 2, $0 \leq \ell \leq 1$ (passage à la limite dans l'encadrement).

La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = \cos(u_n)$, on obtient $\ell = \cos \ell$. Soit $g(\ell) = \cos \ell - \ell = 0$.

Comme $\ell \in [0; 1]$ et que, d'après la question 1, α est l'**unique** solution de $g(x) = 0$ dans $[0; 1]$:

$$\ell = \alpha$$

Correction de la question 5

```
from math import cos
```

```
u = 1
```

```
for n in range(1, 9):
```

```
    u = cos(u)
```

```
    print(n, u)
```

Valeurs approchées :

$u_1 \approx 0,5403$; $u_2 \approx 0,8576$; $u_3 \approx 0,6543$; $u_4 \approx 0,7935$

$u_5 \approx 0,7014$; $u_6 \approx 0,7640$; $u_7 \approx 0,7221$; $u_8 \approx 0,7504$

Interprétation : les termes alternent au-dessus et en dessous de $\alpha \approx 0,739$ en s'en rapprochant. C'est cohérent avec la convergence de (u_n) vers α , sans monotonie.

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1 :** $g' \leq -1$ justifié ($\sin x \geq 0$ sur $[0; 1]$), corollaire du TVI cité avec ses hypothèses, encadrement par deux valeurs.
- **Q2 :** hypothèse de récurrence utilisée, décroissance du cosinus citée avec son intervalle, $\cos 1 > 0$ justifié.
- **Q3 :** trois termes calculés, non-monotonie justifiée par les comparaisons.
- **Q4 :** continuité du cosinus, passage à la limite, ℓ dans $[0; 1]$, et **unicité** invoquée pour conclure $\ell = \alpha$.
- **Q5 :** script correct et interprétation (alternance autour de la limite).

Les réflexes à retenir

- Un problème géométrique se ramène à une **fonction d'une variable** (ici θ), dont on étudie les variations, puis on **conclut en contexte**.
- Pour le signe d'une dérivée trigonométrique, **précise l'intervalle** et cite la monotonie du cosinus ou du sinus sur cet intervalle.
- Une équation $f(x) = 0$ avec une solution évidente ($x = 0$) et une autre à trouver se traite **par intervalles de monotonie**.
- Pour une suite $u_{n+1} = \cos(u_n)$, la limite se trouve par **continuité**, et c'est l'**unicité** de la solution qui l'identifie.
- **Radians** pour toutes les valeurs approchées.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les études de fonctions trigonométriques des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.