

Guide de rédaction : sinus et cosinus

Ce guide complète le Guide de rédaction général.

Il rassemble, pour le chapitre Sinus et cosinus, **les quatorze situations qui reviennent au bac** et, pour chacune, la rédaction modèle.

En trigonométrie, la précision de la rédaction porte sur trois choses :

- la **formule citée** ;
- la **solution générale avec $k \in \mathbb{Z}$** ;
- la **sélection des solutions dans l'intervalle**.

Le principe du chapitre

Avec sinus et cosinus, un correcteur regarde surtout **cinq choses** :

- la **formule ou la valeur remarquable** justifiant chaque égalité ;
- la **solution générale complète** (deux familles, $+2k\pi$) ;
- la **sélection explicite** des solutions de l'intervalle ;
- la **justification de la parité et de la période** avant de réduire l'étude ;
- l'**intervalle précisé** quand on étudie le signe de **sin** ou de **cos**.

1. Les quatorze situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : une valeur exacte avec les angles associés.

« $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\sin \frac{11\pi}{6} = \sin \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}$ (périodicité, puis imparité). »

Nomme la propriété utilisée : angles associés, périodicité, parité.

Situation 2 : $\cos^2 + \sin^2 = 1$ avec le signe.

« $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, soit $\cos x = \pm \frac{4}{5}$. Or $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$: le cosinus y est négatif. Donc $\cos x = -\frac{4}{5}$. »

Sans l'intervalle, tu n'as pas le droit de choisir le signe.

Situation 3 : duplication et addition.

« $\cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$, donc $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$. Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, $\cos \frac{\pi}{8} > 0$. Donc $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$. »

Situation 4 : l'équation $\cos x = \cos a$, sur $\mathbb{R}$.

« Comme $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, l'équation s'écrit $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$. Donc $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. »

Situation 5 : l'équation $\sin x = \sin a$, sur $\mathbb{R}$.

« Comme $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, l'équation s'écrit $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Donc $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. »

Situation 6 : sélectionner les solutions dans un intervalle ($\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0; 2\pi]$).

« $\sin x = \sin \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

Pour $k = 0$: $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$, tous deux dans $[0; 2\pi]$.

Pour $k = 1$: $\frac{7\pi}{3}$ et $\frac{8\pi}{3}$, hors de l'intervalle.

Pour $k = -1$: négatifs, hors de l'intervalle.

Donc $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$. »

Écris la sélection : les valeurs de k testées et pourquoi on les garde ou on les rejette.

Situation 7 : une équation du second degré en $\sin x$ ou $\cos x$.

« On pose $X = \sin x$, avec $-1 \leq X \leq 1$. L'équation $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ devient $2X^2 - X - 1 = 0$. $(2X + 1)(X - 1) = 0$, donc $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = 1$. Ces deux valeurs appartiennent à $[-1; 1]$.

Donc $\sin x = -\frac{1}{2}$ ou $\sin x = 1$... »

Écarte explicitement les valeurs de X en dehors de $[-1; 1]$.

Situation 8 : une inéquation avec le cercle trigonométrique.

« $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $] -\pi; \pi]$ pour $x = \pm \frac{\pi}{4}$. Sur le cercle trigonométrique, les points d'abscisse supérieure ou égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ forment l'arc entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$. Donc $S = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. »

Situation 9 : parité et périodicité.

« Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -f(x)$: f est impaire.

Pour tout x , $f(x + 2\pi) = f(x)$: f est 2π -périodique.

On étudie donc f sur $[0; \pi]$, puis on complète par symétrie par rapport à l'origine et par translations de 2π . »

Situation 10 : dérivée et signe sur l'intervalle d'étude.

« f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. $f'(x) = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.

Comme $(2 + \cos x)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 \cos x + 1$.

Sur $[0; \pi]$, $2 \cos x + 1 > 0 \iff \cos x > -\frac{1}{2} \iff x < \frac{2\pi}{3}$. (Le cosinus est strictement décroissant sur $[0; \pi]$.) »

« Le cosinus est décroissant **sur** $[0; \pi]$ » : précise l'intervalle, sinon l'argument est faux.

Situation 11 : le tableau et le prolongement à $\mathbb{R}$.

Le tableau sur $[0; \pi]$ donne les variations et les valeurs. Puis :

« Par imparité, sur $[-\pi; 0]$, les variations sont les mêmes que sur $[0; \pi]$.

Par 2π -périodicité, la courbe se déduit de celle sur $[-\pi; \pi]$ par translations de vecteur $2k\pi \vec{i}$.

Donc $|f(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ pour tout réel x . »

Situation 12 : limites avec sin et cos.

« Pour $x > 0$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donne $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. »

En 0 : « $\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x}$. Comme $3x \rightarrow 0$, $\frac{\sin(3x)}{3x} \rightarrow 1$. Par produit, la limite est 3. »

Ne jamais écrire « $\lim \sin x = \dots$ » en $\pm\infty$.

Situation 13 : inégalités par études successives.

« Soit $g_1(x) = x - \sin x$. $g_1'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, donc g_1 est croissante, et $g_1(0) = 0$: $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$.

Soit $g_2(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. $g_2'(x) = x - \sin x = g_1(x) \geq 0$, donc g_2 est croissante, et $g_2(0) = 0$: $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$. »

Situation 14 : une suite $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

« On admet que (u_n) converge vers $\ell \in [0; 1]$.

La fonction cosinus est continue.

En passant à la limite dans $u_{n+1} = \cos(u_n)$, on obtient $\ell = \cos \ell$.

Comme α est l'unique solution de $\cos x = x$ dans $[0; 1]$, $\ell = \alpha$. »

2. Avant / après sur la trigonométrie**a) Une équation.**

« $\cos x = \frac{1}{2}$ donc $x = \frac{\pi}{3}$. »

« $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans $] -\pi; \pi]$, $S = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\}$. »

Ce qui manque à la première : la deuxième famille, le « $+2k\pi$ », la sélection dans l'intervalle.

b) Le signe d'une dérivée.

« $2 \cos x + 1 > 0$ donc $x < \frac{2\pi}{3}$. »

« Sur $[0; \pi]$, le cosinus est strictement décroissant et $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Donc $2 \cos x + 1 > 0 \iff \cos x > -\frac{1}{2} \iff x < \frac{2\pi}{3}$. »

c) Une limite.

« $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ car $\sin x$ est borné. »

« Pour $x > 0$, $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$, et les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes, la limite est 0. »

d) Une parité.

« f est impaire. »

« f est définie sur $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, et $f(-x) = \frac{-\sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$. Donc f est impaire. »

3. Les erreurs de rédaction propres à ce chapitre

- Oublier $+2k\pi$ ou la **deuxième famille** de solutions.
- Ne pas **sélectionner** les solutions dans l'intervalle demandé.
- Choisir le signe de $\cos$ ou $\sin$ dans $\cos^2 + \sin^2 = 1$ **sans citer l'intervalle**.
- Garder $X = \cos x$ ou $\sin x$ **en dehors de $[-1; 1]$** .
- Utiliser une monotonie de $\cos$ ou $\sin$ **sans préciser l'intervalle**.
- Réduire l'intervalle d'étude **sans justifier** la parité ou la période.
- Écrire « **lim sin x** » ou « **lim cos x** » en $\pm\infty$.
- Calculatrice en degrés.

4. La check-list du chapitre Sinus et cosinus

- Chaque égalité s'appuie sur une **formule ou une valeur nommée**.
- Ma solution générale contient **deux familles** et $+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- J'ai écrit la **sélection** des solutions de l'intervalle.
- Pour une équation du second degré, j'ai posé X et écarté les valeurs hors de $[-1; 1]$.
- J'ai **justifié la parité et la période** avant de réduire l'intervalle d'étude.
- Chaque signe de $\sin$ ou $\cos$ cite son **intervalle** et la **monotonie** utilisée.
- Mes limites utilisent les **gendarmes** ou $\frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$ avec $X \rightarrow 0$.
- Ma calculatrice est en **radians**.

En trigonométrie, oublier « $+2k\pi$ », c'est comme rendre un devoir sans nom : le contenu est peut-être bon, mais personne ne sait à qui l'attribuer.