

Sinus et cosinus

Nom : _____

Fiche Standard

Date : _____

Exercice S1 : Équations se ramenant au second degré

Résoudre dans l'intervalle indiqué :

1. $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ dans $] -\pi ; \pi]$;
2. $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$ dans $[0 ; 2\pi]$;
3. $4 \cos^2 x - 3 = 0$ dans $[0 ; \pi]$.

Exercice S2 : Duplication, équation et inéquation

Pour tout réel x , on pose $P(x) = \cos 2x + 3 \sin x - 2$. On rappelle que $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ pour tout réel x .

1. Montrer que $P(x) = -(2 \sin x - 1)(\sin x - 1)$.
2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$ dans $[0 ; 2\pi]$.
3. Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$ dans $[0 ; 2\pi]$.

Exercice S3 : Une équation avec deux angles

Résoudre dans $[0 ; \pi]$ l'équation $\sin 3x = \cos x$. On pourra écrire $\cos x$ sous la forme $\sin(\dots)$.

Exercice S4 : Étude d'une fonction trigonométrique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$. On rappelle que $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ pour tout réel x .

1. Montrer que f est impaire et 2π -périodique. Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0 ; \pi]$.
2. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = 2(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$.
3. Étudier le signe de f' sur $[0 ; \pi]$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; \pi]$.
4. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f à l'origine.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $[0 ; \pi]$.

Exercice S5 : Modéliser une marée

Dans un port, la hauteur d'eau, en mètres, à l'instant t (en heures après minuit) est modélisée sur $[0 ; 24]$ par

$$H(t) = 5 + 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right).$$

1. Donner une période de H . Déterminer la hauteur maximale, la hauteur minimale et les instants de $[0 ; 24]$ où elles sont atteintes.
2. Un bateau ne peut entrer dans le port que si la hauteur d'eau est d'au moins 6,5 m. Déterminer les intervalles de temps de $[0 ; 24]$ pendant lesquels il peut entrer, puis la durée totale correspondante.
3. Calculer $H'(t)$. À quels instants de $[0 ; 24]$ le niveau varie-t-il le plus vite, et à quelle vitesse (en m/h, valeur exacte puis arrondie au centième) ?

Exercice S6 : Limites avec sinus et cosinus

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ (on rappelle que $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$) ;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$;
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x + \cos x}$;
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos x$;

5. la limite de la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = (n+1) \sin \frac{2}{n}$.

Exercice S7 : Des inégalités par études de fonctions

1. Soit $g(x) = x - \sin x$ sur $[0; +\infty[$. Étudier le sens de variation de g et en déduire que $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
2. Soit $h(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ sur $[0; +\infty[$. Calculer $h'(x)$, puis montrer que $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
3. En déduire que, pour tout $x > 0$, $0 \leq \frac{1 - \cos x}{x} \leq \frac{x}{2}$, puis la limite de $\frac{1 - \cos x}{x}$ en 0^+ .
4. Donner un encadrement de $\cos 0,1$ à l'aide de ces résultats.

Exercice S8 : Résolution approchée par dichotomie

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ par $f(x) = 2 \sin x - x$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
2. On considère le programme suivant.

```
from math import sin, pi

def f(x):
    return 2*sin(x) - x

def dichotomie(a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(m) > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b
```

- a) Pourquoi, lorsque $f(m) > 0$, peut-on affirmer que $\alpha > m$?
- b) Quel encadrement de α renvoie `dichotomie(pi/2, pi, 0.1)` ? (Détaillez les étapes, puis donner un encadrement de α dont les bornes sont arrondies au centième, par défaut pour la borne inférieure et par excès pour la borne supérieure.)
- c) Combien d'itérations de la boucle sont nécessaires pour obtenir une amplitude inférieure ou égale à 10^{-6} ?

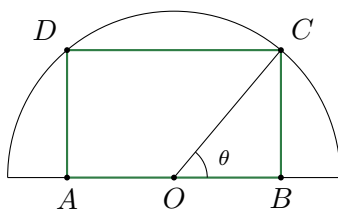
Exercice S9 : Primitives et intégrales

On rappelle que $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ pour tout réel x .

1. Calculer $I = \int_0^{\pi/3} \sin(3x) dx$.
2. Calculer $J = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$ après avoir linéarisé $\cos^2 x$.
3. On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes de $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \sin x \cos x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_2$ et calculer l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par ces deux courbes et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.
4. Calculer la valeur moyenne de $x \mapsto \sin^2 x$ sur $[0; \pi]$.

Exercice S10 : Optimisation : un rectangle dans un demi-disque

Soit $\mathcal{D}$ le demi-disque de centre O et de rayon 1 situé dans le demi-plan $y \geq 0$. Pour $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on note $ABCD$ le rectangle dont les sommets A et B sont sur le diamètre, symétriques par rapport à O , et dont les sommets C et D sont sur l'arc de cercle, avec $B(\cos \theta; 0)$ et $C(\cos \theta; \sin \theta)$.



1. Exprimer l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ et le périmètre $p(\theta)$ du rectangle en fonction de θ . Montrer que $\mathcal{A}(\theta) = \sin 2\theta$ (on rappelle que $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$) et en déduire la valeur maximale de l'aire et la valeur de θ correspondante.
2. Montrer que $p'(\theta) = 2(\cos \theta - 2 \sin \theta)$.
3. Montrer que $q(\theta) = \cos \theta - 2 \sin \theta$ est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, puis qu'il existe un unique $\theta_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $q(\theta_0) = 0$.
4. Montrer que $\sin \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\cos \theta_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$. En déduire le tableau de variations de p et la valeur exacte du périmètre maximal.
5. Le rectangle d'aire maximale est-il aussi celui de périmètre maximal ? Justifier.