

Corrigé : Sinus et cosinus**Fiche Standard****S1.**

1. On pose $X = \sin x$, avec $X \in [-1; 1]$: $2X^2 + X - 1 = 0$. $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc $X = \frac{-1-3}{4} = -1$ ou $X = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$. Les deux valeurs conviennent.

$\sin x = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ (même famille). Dans $]-\pi; \pi]$: $-\frac{\pi}{2}$.

$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Dans $]-\pi; \pi]$: $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

2. On pose $X = \cos x$: $2X^2 - 5X + 2 = 0$, $\Delta = 25 - 16 = 9$, $X = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ ou $X = \frac{5+3}{4} = 2$. La valeur 2 est impossible car $\cos x \leq 1$. Reste $\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Dans $[0; 2\pi]$: $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$.

3. $4\cos^2 x - 3 = (2\cos x - \sqrt{3})(2\cos x + \sqrt{3})$, donc $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dans $[0; \pi]$, le cosinus est strictement décroissant (donc injectif) et $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

S2.

1. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, donc $P(x) = 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = -2\sin^2 x + 3\sin x - 1$. Par ailleurs $-(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = -(2\sin^2 x - 3\sin x + 1) = -2\sin^2 x + 3\sin x - 1$. D'où l'égalité.

2. $P(x) = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2}$ ou $\sin x = 1$. $\sin x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $\sin x = 1$: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Dans $[0; 2\pi]$: $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

3. Pour tout x , $\sin x - 1 \leq 0$. Donc $P(x) = (2\sin x - 1)(1 - \sin x)$ avec $1 - \sin x \geq 0$. Si $\sin x = 1$, $P(x) = 0 \geq 0$ convient. Sinon $1 - \sin x > 0$ et $P(x) \geq 0 \iff 2\sin x - 1 \geq 0 \iff \sin x \geq \frac{1}{2}$.

Dans tous les cas, $P(x) \geq 0 \iff \sin x \geq \frac{1}{2}$ (le cas $\sin x = 1$ vérifie aussi $\sin x \geq \frac{1}{2}$). Sur $[0; 2\pi]$:

$\mathcal{S} = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

- S3.** Comme $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, l'équation s'écrit $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Donc, avec $k \in \mathbb{Z}$:

- soit $3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$, c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$;
- soit $3x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$, c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Dans $[0; \pi]$: la première famille donne $\frac{\pi}{8}$ ($k = 0$) et $\frac{5\pi}{8}$ ($k = 1$) ($k = 2$ donne $\frac{9\pi}{8} > \pi$); la seconde donne $\frac{\pi}{4}$ ($k = 0$) ($k = 1$ donne $\frac{5\pi}{4} > \pi$).

Vérification pour $x = \frac{\pi}{4}$: $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{8}\right\}$.

S4.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ (qui est symétrique par rapport à 0) et $f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -2\sin x - \sin 2x = -f(x)$: f est impaire. De plus $f(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 4\pi) = f(x)$: f est 2π -périodique. On étudie f sur $[-\pi; \pi]$ (longueur 2π), puis, par imparité, sur $[0; \pi]$; la courbe se complète par symétrie par rapport à O puis par translations de vecteur $2\pi\vec{i}$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2\cos x + 2(2\cos^2 x - 1) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1)$. Or $(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1 = 2\cos^2 x + \cos x - 1$. D'où $f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.
3. Pour tout x , $\cos x + 1 \geq 0$, et $\cos x + 1 = 0$ sur $[0; \pi]$ seulement pour $x = \pi$. Sur $[0; \pi]$, $2\cos x - 1 \geq 0 \iff \cos x \geq \frac{1}{2} \iff x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ (le cosinus est décroissant sur $[0; \pi]$ et $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$). Donc $f'(x) > 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, $f'(x) < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'(\pi) = 0$. On calcule $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\pi) = 0 + \sin 2\pi = 0$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0

4. Sur $[0; \pi]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ d'après le tableau. Sur $[-\pi; 0]$, $f(x) = -f(-x) \in \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right]$. Par 2π -périodicité, pour tout réel x : $-\frac{3\sqrt{3}}{2} \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (atteint en $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$) et le minimum est $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (atteint en $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$).
5. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2(2 - 1)(1 + 1) = 4$. La tangente a pour équation $y = 4x$.
6. $\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6 > 1$ car $3\sqrt{3} > 2$. Sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, f est continue et strictement croissante, avec $f(0) = 0 < 1 < \frac{3\sqrt{3}}{2}$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires (corollaire pour les fonctions strictement monotones), $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans cet intervalle. Sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, f est continue et strictement décroissante de $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ à 0, avec $0 < 1 < \frac{3\sqrt{3}}{2}$: unique solution β dans cet intervalle. $\alpha \neq \beta$ car $\alpha < \frac{\pi}{3} < \beta$ ($f\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq 1$).
Conclusion : l'équation $f(x) = 1$ a exactement deux solutions dans $[0; \pi]$.

S5.

1. $\cos\left(\frac{\pi(t+12)}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 2\pi\right) = \cos \frac{\pi t}{6}$: H est 12-périodique (12 heures). Comme $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) \leq 1$, $2 \leq H(t) \leq 8$. Maximum 8 m si $\cos \frac{\pi t}{6} = 1$, soit $\frac{\pi t}{6} = 2k\pi$, $t = 12k$: $t = 0$, 12 et 24. Minimum 2 m si $\cos \frac{\pi t}{6} = -1$, soit $\frac{\pi t}{6} = \pi + 2k\pi$, $t = 6 + 12k$: $t = 6$ et $t = 18$.
2. $H(t) \geq 6,5 \iff 3\cos \frac{\pi t}{6} \geq 1,5 \iff \cos u \geq \frac{1}{2}$ avec $u = \frac{\pi t}{6} \in [0; 4\pi]$. Or $\cos u \geq \frac{1}{2} \iff u \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$. Sur $[0; 4\pi]$: $u \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{3}; 4\pi\right]$. Avec $t = \frac{6u}{\pi}$: $t \in [0; 2] \cup [10; 14] \cup [22; 24]$.
Conclusion : le bateau peut entrer de 0 h à 2 h, de 10 h à 14 h et de 22 h à 24 h, soit $2 + 4 + 2 = 8$ heures au total.

3. $H'(t) = 3 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi t}{6} = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{6}$. La vitesse de variation $|H'(t)|$ est maximale quand $\left|\sin \frac{\pi t}{6}\right| = 1$, soit $\frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $t = 3 + 6k$: $t = 3, 9, 15, 21$ (à ces instants $H = 5$ m, mi-marée). La vitesse maximale est $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ m/h.

S6.

- Pour $x \neq 0$: $\frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \rightarrow 2 \times 1^2 = 2$.
- Pour $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, $\sin 2x \neq 0$ et $\frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{5}{2}$. Or $\frac{\sin 5x}{5x} \rightarrow 1$ et $\frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}} \rightarrow 1$.
Donc la limite vaut $\frac{5}{2}$.
- Pour $x > 1$, $x + \cos x \geq x - 1 > 0$, donc le quotient est défini et, en divisant numérateur et dénominateur par x : $\frac{2x + \sin x}{x + \cos x} = \frac{2 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}}$. Comme $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ et de même pour le cosinus, le théorème des gendarmes donne $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{\cos x}{x} \rightarrow 0$. Donc la limite vaut $\frac{2+0}{1+0} = 2$.
- Pour tout x , $|e^{-x} \cos x| \leq e^{-x}$, soit $-e^{-x} \leq e^{-x} \cos x \leq e^{-x}$. Comme $e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos x = 0$.
- $u_n = \frac{n+1}{n} \times 2 \times \frac{\sin \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}$. Quand $n \rightarrow +\infty$, $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ et, avec $X = \frac{2}{n} \rightarrow 0$, $\frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

S7.

- g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$: g est croissante. Comme $g(0) = 0$, on a $g(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, soit $\sin x \leq x$.
- $h'(x) = -\sin x + x = g(x) \geq 0$ d'après la question 1. Donc h est croissante sur $[0; +\infty[$ et $h(0) = 1 - 1 + 0 = 0$: $h(x) \geq 0$, soit $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
- Pour tout x , $\cos x \leq 1$ donc $1 - \cos x \geq 0$; et $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ donne $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$. En divisant par $x > 0$: $0 \leq \frac{1 - \cos x}{x} \leq \frac{x}{2}$. Comme $\frac{x}{2} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.
- Avec $x = 0,1$: $1 - \frac{0,01}{2} \leq \cos 0,1 \leq 1$, soit $0,995 \leq \cos 0,1 \leq 1$.

S8.

- f est dérivable et $f'(x) = 2 \cos x - 1$. Sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\cos x \leq 0$ donc $f'(x) \leq -1 < 0$: f est strictement décroissante. Elle est continue, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$ (car $\pi < 4$) et $f(\pi) = -\pi < 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.
- a) Si $f(m) > 0$, alors $f(m) > f(\alpha) = 0$. Comme f est strictement décroissante, $f(m) > f(\alpha)$ entraîne $m < \alpha$. La borne inférieure a peut donc être remplacée par m sans perdre la solution (de même, si $f(m) \leq 0$, alors $\alpha \leq m$ et b est remplacé par m).
- b) Étapes (amplitude initiale $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$) :

itération	m	signe de $f(m)$	nouvel intervalle
1	$\frac{3\pi}{4} \approx 2,356$	—	$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$
2	$\frac{5\pi}{8} \approx 1,963$	—	$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{8}\right]$
3	$\frac{9\pi}{16} \approx 1,767$	+	$\left[\frac{9\pi}{16}; \frac{5\pi}{8}\right]$
4	$\frac{19\pi}{32} \approx 1,865$	+	$\left[\frac{19\pi}{32}; \frac{5\pi}{8}\right]$

Après 4 itérations l'amplitude est $\frac{\pi}{32} \approx 0,098 \leq 0,1$: la boucle s'arrête. Le programme renvoie $\left(\frac{19\pi}{32}; \frac{5\pi}{8}\right)$, soit environ $(1,865; 1,963)$. Conclusion : $1,86 < \alpha < 1,97$ (arrondi par défaut de 1,865... et par excès de 1,963..., pour conserver l'encadrement).

- c) Après n itérations, l'amplitude vaut $\frac{\pi}{2 \times 2^n}$. On cherche le plus petit n tel que $\frac{\pi}{2^{n+1}} \leq 10^{-6}$, soit $2^{n+1} \geq \pi \times 10^6 \approx 3\,141\,593$. Or $2^{21} = 2\,097\,152 < 3\,141\,593 \leq 4\,194\,304 = 2^{22}$. Donc $n+1 = 22$: 21 itérations.

S9.

- $I = \left[-\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\pi/3} = -\frac{\cos \pi}{3} + \frac{\cos 0}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, donc $J = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.
- $u(x) - v(x) = \sin x(1 - \cos x)$. Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq 0$ et $1 - \cos x \geq 0$, donc $u \geq v$: $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_2$. L'aire vaut $\mathcal{A} = \int_0^{\pi/2} (\sin x - \sin x \cos x) dx$. Or $\sin x \cos x$ est de la forme $u'u$ avec $u = \sin$, de primitive $\frac{\sin^2 x}{2}$. Donc $\mathcal{A} = \left[-\cos x - \frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \left(0 - \frac{1}{2}\right) - (-1 - 0) = \frac{1}{2}$ u.a.
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$. La valeur moyenne est $\frac{1}{\pi - 0} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$.

S10.

- Le rectangle a pour dimensions $AB = 2 \cos \theta$ et $BC = \sin \theta$. Donc $\mathcal{A}(\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ et $p(\theta) = 2(2 \cos \theta + \sin \theta) = 4 \cos \theta + 2 \sin \theta$. Comme $2\theta \in]0; \pi[$, $\sin 2\theta \leq 1$ avec égalité si et seulement si $2\theta = \frac{\pi}{2}$. Conclusion : l'aire maximale vaut 1, atteinte pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.
- $p'(\theta) = -4 \sin \theta + 2 \cos \theta = 2(\cos \theta - 2 \sin \theta)$.
- q est dérivable et $q'(\theta) = -\sin \theta - 2 \cos \theta < 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (car $\sin \theta \geq 0$, $\cos \theta \geq 0$, et ils ne sont jamais nuls simultanément). Donc q est strictement décroissante. Elle est continue, $q(0) = 1 > 0$ et $q\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 < 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $q(\theta) = 0$ admet une unique solution $\theta_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, avec $q > 0$ sur $[0; \theta_0[$ et $q < 0$ sur $\left]\theta_0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- $q(\theta_0) = 0$ donne $\cos \theta_0 = 2 \sin \theta_0$. Avec $\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 = 1$: $5 \sin^2 \theta_0 = 1$, donc $\sin \theta_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$. Comme $\theta_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin \theta_0 > 0$: $\sin \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\cos \theta_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Alors $p(\theta_0) = \frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$. On a aussi $p(0) = 4$ et $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ (valeurs limites).

θ	0	θ_0	$\frac{\pi}{2}$
$p'(\theta)$		+	0
$p(\theta)$	4	$2\sqrt{5}$	2

Conclusion : le périmètre maximal vaut $2\sqrt{5} \approx 4,47$, atteint pour θ_0 tel que $\sin \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (soit $\theta_0 \approx 0,464$ rad).

5. Non : l'aire est maximale pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ et, pour cette valeur, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{1}{\sqrt{5}}$; or θ_0 est l'unique valeur pour laquelle $\sin \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dans $]0; \frac{\pi}{2}[$ (le sinus y est strictement croissant). Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, le périmètre vaut $3\sqrt{2} \approx 4,24 < 2\sqrt{5}$.