

Sinus et cosinus**Fiche Défi**

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Démontrer les formules d'addition (pour aller plus loin, hors programme)

Les formules d'addition ne figurent pas au programme de la classe de Terminale : cet exercice est proposé pour aller plus loin.

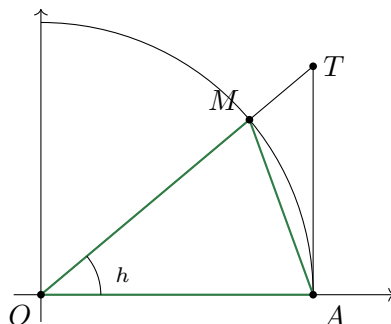
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soient a et b deux réels, A et B les points du cercle trigonométrique associés à a et à b .

1. Donner les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, puis exprimer $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ avec les coordonnées.
2. Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est $b - a$. En déduire une autre expression de $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, puis la formule $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
3. En déduire $\cos(a + b)$, puis $\sin(a + b)$ (on pourra utiliser $\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$), puis $\sin 2a$ et $\cos 2a$.
4. Calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ en écrivant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Vérifier que $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ par une autre méthode, puis donner $\cos \frac{5\pi}{12}$.

Exercice D2 : La dérivée du sinus (pour aller plus loin, hors programme)

Le programme donne les dérivées de sinus et de cosinus sans démonstration exigible : cet exercice est proposé pour aller plus loin.

Soit $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Sur le cercle trigonométrique de centre O , on place $A(1; 0)$, le point M associé à h , et le point T de la droite (OM) d'abscisse 1.



1. Exprimer en fonction de h les aires du triangle OAM , du secteur circulaire d'angle h délimité par $[OA]$, $[OM]$ et l'arc AM , et du triangle OAT (on exprimera AT avec $\sin h$ et $\cos h$).
2. En comparant ces aires, montrer que $\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1$, puis que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ (on justifiera aussi le cas $h < 0$).
3. Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ (on rappelle que $\cos h = 1 - 2 \sin^2 \frac{h}{2}$).
4. En déduire que $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\sin'(x) = \cos x$. On rappelle que $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$.

Exercice D3 : Une étude de fonction complète

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π -périodique.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$, puis montrer que pour tout réel x , $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(x) \leq$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f à l'origine.
5. a) Vérifier que $\frac{\pi}{2}$ est solution de $f(x) = \frac{1}{2}$.
 b) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet exactement deux solutions dans $[-\pi; \pi]$, dont $\frac{\pi}{2}$. Donner à la calculatrice un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l'autre.
6. Montrer que $F(x) = -\ln(2 + \cos x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En déduire l'aire du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$, puis la valeur moyenne de f sur $[0; \pi]$.

Exercice D4 : Archimède et le nombre π

Pour $n \geq 2$, on note a_n le demi-périmètre du polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Montrer qu'un polygone régulier à N côtés inscrit dans ce cercle a pour côté $2 \sin \frac{\pi}{N}$. En déduire $a_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$.
2. Calculer a_2 , puis $\sin \frac{\pi}{8}$ (on rappelle que $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ et on l'applique avec $a = \frac{\pi}{8}$) et la valeur exacte de a_3 .
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pi$.
4. On admet que $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$. Montrer que $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $0 \leq \pi - a_n \leq \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}$.
5. En utilisant $\pi < 3,2$, montrer que $\pi - a_{12} < 10^{-6}$.
6. Le programme ci-dessous affiche 12. Que représente cette valeur et en quoi est-ce cohérent avec la question précédente ?

```
from math import sin, pi
n = 2
while abs(pi - 2**n * sin(pi / 2**n)) >= 1e-6:
    n = n + 1
print(n)
```

Exercice D5 : Une courbe qui ondule autour d'une droite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \sin x$, et $\mathcal{C}$ sa courbe. On note D la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$.

1. Montrer que f est impaire. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$ et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une infinité de points d'inflexion et déterminer l'équation de la tangente en celui d'abscisse π .
4. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de D . La droite D est-elle asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$?
6. Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. On pourra remarquer que $2 < \frac{2\pi}{3}$.

Exercice D6 : Une somme non périodique

1. Montrer que $g(x) = \cos x + \cos 2x$ est 2π -périodique et que $g(x) = 2$ si et seulement si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. Soit $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{2}x)$. Montrer que $f(x) = 2$ si et seulement si $\cos x = 1$ et $\cos(\sqrt{2}x) = 1$.
3. En raisonnant par l'absurde et en utilisant l'irrationalité de $\sqrt{2}$, montrer que f n'est pas périodique.

Exercice D7 : Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
3. En déduire I_2 , I_3 , I_4 et I_5 .
4. Montrer que la suite (I_n) est strictement positive et décroissante.
5. Montrer que la suite $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est constante et donner sa valeur.
6. Montrer que $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

Exercice D8 : Concavité du sinus et inégalité de Jordan

1. Montrer que $\sin$ est concave sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ (on interprétera $x \mapsto \frac{2x}{\pi}$ comme la corde joignant les points de la courbe d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$).
2. Pour $R > 0$, on pose $K(R) = \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta$. Montrer que $0 < K(R) \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta$.
3. Calculer cette dernière intégrale, puis montrer que $K(R) \leq \frac{\pi}{2R}$ et déterminer $\lim_{R \rightarrow +\infty} K(R)$.

Exercice D9 : La fonction tangente (approfondissement)

Le programme cite la fonction tangente comme approfondissement possible. On note

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et on pose $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in D$.

1. Justifier que D est l'ensemble des réels en lesquels le cosinus ne s'annule pas. Montrer que, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $x + \pi \in D$, que $\tan$ est impaire et qu'elle est π -périodique.
2. Montrer que $\tan$ est dérivable sur D et que $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$, puis dresser le tableau de variations de $\tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (limites comprises).
3. Montrer que, pour tout réel y , l'équation $\tan x = y$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Résoudre dans D les équations $\tan x = 1$ et $\tan x = -\sqrt{3}$.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $\tan$ au point d'abscisse 0. Montrer que $\tan x \geq x$ pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ (étudier $h(x) = \tan x - x$). En déduire, avec l'inégalité $\sin x \leq x$ valable pour $x \geq 0$, que $\sin x \leq x \leq \tan x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.
5. Montrer que $\tan''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$. Étudier la convexité de $\tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et justifier que l'origine est un point d'inflexion de la courbe.