

Corrigé : Sinus et cosinus**Fiche Défi****D1.**

- $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
- Comme $OA = OB = 1$: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \cos(b - a) = \cos(a - b)$ (parité du cosinus). En égalant les deux expressions : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
- $\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
 $\sin(a + b) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$
 $= \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
Avec $b = a$: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.
- $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.
 $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
Alors $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 + 6 + 2\sqrt{12}}{16} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. Autre méthode : $\cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$, donc
 $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. Les deux résultats coïncident.
Enfin $\cos \frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

D2.

- Le triangle OAM a pour base $OA = 1$ et pour hauteur $\sin h$: aire $\frac{\sin h}{2}$. Le secteur d'angle h dans un disque de rayon 1 a pour aire $\frac{h}{2}$ (proportionnelle à l'angle : $\frac{h}{2\pi} \times \pi$). Dans le triangle OAT , rectangle en A , $AT = \frac{\sin h}{\cos h}$ (car T est sur la droite (OM) d'équation $y = \frac{\sin h}{\cos h}x$ et d'abscisse 1) :
aire $\frac{\sin h}{2 \cos h}$.
- Le triangle OAM est inclus dans le secteur, lui-même inclus dans le triangle OAT : $\frac{\sin h}{2} \leq \frac{h}{2} \leq \frac{\sin h}{2 \cos h}$. En multipliant par $2 > 0$ puis en divisant par $h > 0$: $\frac{\sin h}{h} \leq 1$ et $1 \leq \frac{\sin h}{h \cos h}$, soit $\cos h \leq \frac{\sin h}{h}$. D'où $\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1$. Quand $h \rightarrow 0^+$, $\cos h \rightarrow 1$ (continuité de $\cos$ en 0), donc par le théorème des gendarmes $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$. Pour $h < 0$, $\frac{\sin h}{h} = \frac{\sin(-h)}{-h}$ (le quotient est pair), donc la limite à gauche vaut aussi 1. Conclusion : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.
- $\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{-2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} = -\sin \frac{h}{2} \times \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$. Quand $h \rightarrow 0$, $\sin \frac{h}{2} \rightarrow 0$ et $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \rightarrow 1$, donc la limite vaut 0.
- Pour $h \neq 0$: $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \times \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \times \frac{\sin h}{h} \rightarrow \sin x \times 0 + \cos x \times 1 = \cos x$.
Conclusion : $\sin$ est dérivable en tout réel x et $\sin'(x) = \cos x$.

D3.

- Pour tout x , $2 + \cos x \geq 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule pas, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables. $f(-x) = \frac{-\sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$: f est impaire. Comme $\sin$ et $\cos$ sont 2π -périodiques, $f(x + 2\pi) = f(x)$.
- $f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) - \sin x \times (-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.

3. Le dénominateur est strictement positif : f' a le signe de $2 \cos x + 1$. Sur $[0; \pi]$, $2 \cos x + 1 \geq 0 \iff \cos x \geq -\frac{1}{2} \iff x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$. On a $f(0) = 0$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f(\pi) = 0$.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Sur $[0; \pi]$, $0 \leq f \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Par imparité, sur $[-\pi; 0]$, $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq f \leq 0$. Par 2π -périodicité, pour tout réel x : $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Tangente : $y = \frac{x}{3}$.
5. a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$.
- b) Sur $[-\pi; 0]$, $f \leq 0 < \frac{1}{2}$: pas de solution. Sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, f est continue et strictement croissante de 0 à $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$, et $0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ (car $\frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{2} \iff 2\sqrt{3} > 3 \iff 12 > 9$) : une unique solution, qui est $\frac{\pi}{2}$. Sur $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$, f est continue et strictement décroissante de $\frac{\sqrt{3}}{3}$ à 0 : unique solution β . Conclusion : exactement deux solutions dans $[-\pi; \pi]$. À la calculatrice, $f(2,49) \approx 0,5033 > \frac{1}{2} > f(2,50) \approx 0,4992$ et f est décroissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$: $2,49 < \beta < 2,50$.
6. $F'(x) = -\frac{\sin x}{2 + \cos x} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} = f(x)$: F est une primitive de f . Comme $f \geq 0$ sur $[0; \pi]$, l'aire vaut $\int_0^\pi f(x) dx = F(\pi) - F(0) = -\ln 1 + \ln 3 = \ln 3$ u.a. Valeur moyenne : $\frac{1}{\pi} \ln 3 \approx 0,350$.

D4.

1. Soit $[M_0M_1]$ un côté du polygone : l'angle au centre $\widehat{M_0OM_1}$ mesure $\frac{2\pi}{N}$. Le triangle OM_0M_1 est isocèle en O ; la hauteur issue de O coupe $[M_0M_1]$ en son milieu H et l'angle $\widehat{M_0OH} = \frac{\pi}{N}$. Dans le triangle rectangle OHM_0 , $M_0H = OM_0 \sin \frac{\pi}{N} = \sin \frac{\pi}{N}$, donc $M_0M_1 = 2 \sin \frac{\pi}{N}$. Avec $N = 2^n$, le périmètre est $2^n \times 2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ et $a_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$.
2. $a_2 = 4 \sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$. De $\cos \frac{\pi}{4} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8}$: $\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$. Comme $\frac{\pi}{8} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin \frac{\pi}{8} > 0$: $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$. Donc $a_3 = 8 \sin \frac{\pi}{8} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 3,061$.
3. $a_n = \pi \times \frac{\sin h_n}{h_n}$ avec $h_n = \frac{\pi}{2^n}$. Comme $h_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$ quand $h \rightarrow 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pi$.
4. Soit $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ sur $[0; +\infty[$. $g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$ d'après l'inégalité admise. Donc g est croissante et $g(0) = 0$: $g(x) \geq 0$, soit $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$. Avec $x = h_n > 0$: $a_n = \frac{\pi}{h_n} \sin h_n \geq \frac{\pi}{h_n} \left(h_n - \frac{h_n^3}{6}\right) = \pi - \frac{\pi h_n^2}{6}$. Comme aussi $\sin h_n \leq h_n$, $a_n \leq \pi$. D'où $0 \leq \pi - a_n \leq \frac{\pi h_n^2}{6} = \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}$.

5. $\pi < 3,2$ donne $\pi^3 < 32,768$. Pour $n = 12$: $\pi - a_{12} \leq \frac{32,768}{6 \times 4^{12}} = \frac{32,768}{100\,663\,296} < 3,3 \times 10^{-7} < 10^{-6}$.
6. La valeur affichée est le plus petit entier $n \geq 2$ tel que l'écart $\pi - a_n$ soit strictement inférieur à 10^{-6} (le sinus étant calculé en flottants). C'est cohérent avec la question précédente : l'écart est inférieur à 10^{-6} dès $n = 12$, donc le programme s'arrête au plus tard à $n = 12$. Le majorant de la question 4 n'est qu'une borne : la valeur 12 affichée signifie que, pour $n = 11$, l'écart réel ($\approx 1,2 \times 10^{-6}$) reste supérieur ou égal à 10^{-6} , donc 12 est bien le premier rang qui convient.

D5.

1. $f(-x) = -\frac{x}{2} - \sin x = -f(x)$: f est impaire. $f'(x) = \frac{1}{2} + \cos x$ et $f''(x) = -\sin x$.
2. $f'(x) \geq 0 \iff \cos x \geq -\frac{1}{2} \iff x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ sur $[0; \pi]$ (cosinus décroissant). $f(0) = 0$,
 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,913$, $f(\pi) = \frac{\pi}{2} \approx 1,571$.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

3. $f''(x) = -\sin x$ s'annule en changeant de signe en chaque $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (positif sur $] \pi + 2m\pi; 2\pi + 2m\pi[$, négatif sur $]2m\pi; \pi + 2m\pi[$). La courbe a donc une infinité de points d'inflexion, d'abscisses $k\pi$. En π : $f(\pi) = \frac{\pi}{2}$ et $f'(\pi) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. Tangente : $y = -\frac{1}{2}(x - \pi) + \frac{\pi}{2} = -\frac{x}{2} + \pi$.
4. $-1 \leq \sin x \leq 1$ donne $\frac{x}{2} - 1 \leq f(x) \leq \frac{x}{2} + 1$. Comme $\frac{x}{2} - 1 \rightarrow +\infty$ en $+\infty$, par comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Comme $\frac{x}{2} + 1 \rightarrow -\infty$ en $-\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
5. $f(x) - \frac{x}{2} = \sin x$. La courbe est au-dessus de D lorsque $\sin x > 0$ (sur les $]2k\pi; (2k+1)\pi[$), au-dessous lorsque $\sin x < 0$, et coupe D aux points d'abscisse $k\pi$. D n'est pas asymptote : $f(x) - \frac{x}{2} = \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$ (en particulier ne tend pas vers 0, puisque $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$).
6. Soit $x > 0$. Si $x > 2$: $f(x) \geq \frac{x}{2} - 1 > 0$. Si $0 < x \leq 2$: comme $2 < \frac{2\pi}{3}$, f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ et $f(0) = 0$, donc $f(x) > 0$. Ainsi $f > 0$ sur $]0; +\infty[$; par imparité $f < 0$ sur $] -\infty; 0[$. Conclusion : 0 est l'unique solution de $f(x) = 0$.

D6.

1. $g(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + \cos(2x + 4\pi) = g(x)$. Comme $\cos x \leq 1$ et $\cos 2x \leq 1$, $g(x) = 2$ si et seulement si $\cos x = 1$ et $\cos 2x = 1$. Or $\cos x = 1 \iff x \in 2\pi\mathbb{Z}$, et alors $\cos 2x = \cos(4k\pi) = 1$. Donc $g(x) = 2 \iff x \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. De même, $f(x) \leq 2$ avec égalité si et seulement si $\cos x = 1$ et $\cos(\sqrt{2}x) = 1$ (si l'un des deux était < 1 , la somme serait < 2).
3. Supposons f périodique, de période $T > 0$. Alors $f(T) = f(0) = 2$. D'après la question 2, $\cos T = 1$ et $\cos(\sqrt{2}T) = 1$, donc il existe des entiers k et m tels que $T = 2k\pi$ et $\sqrt{2}T = 2m\pi$. Comme $T > 0$, $k \geq 1$ et $m \geq 1$. En divisant : $\sqrt{2} = \frac{m}{k}$, ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Conclusion : f n'est pas périodique.

D7.

1. $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$.
2. $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x \times \sin x \, dx$. On pose $u(x) = \sin^{n+1} x$, $u'(x) = (n+1) \sin^n x \cos x$ et $v'(x) = \sin x$, $v(x) = -\cos x$; ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $I_{n+2} = [-\cos x \sin^{n+1} x]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^n x \, dx$. Le crochet vaut 0. Avec $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$: $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$, soit $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
3. $I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{4}$; $I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}$; $I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3\pi}{16}$; $I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{8}{15}$.
4. Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin x \leq 1$, donc $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$ et $I_{n+1} \leq I_n$. Plus précisément $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^n x (1 - \sin x) \, dx > 0$ car la fonction intégrée est continue, positive et non identiquement nulle. De même $I_n > 0$ pour tout n (fonction continue, positive, non nulle). La suite est strictement positive et strictement décroissante.
5. $u_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = I_{n+1} \times (n+1)I_n = u_n$. La suite est constante, égale à $u_0 = I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$.
6. La suite est décroissante : $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. Comme $I_n > 0$, on divise par I_n : $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Or $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$ d'après la question 2. Donc $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Comme $\frac{n+1}{n+2} \rightarrow 1$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

D8.

1. $\sin''(x) = -\sin x \leq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $\sin$ est concave sur cet intervalle, donc sa courbe est au-dessus de chacune de ses cordes. La corde joignant les points $(0; 0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ est le segment de la droite d'équation $y = \frac{2x}{\pi}$. Conclusion : pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$.
2. Pour $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $R > 0$: $R \sin \theta \geq \frac{2R\theta}{\pi}$, donc $-R \sin \theta \leq -\frac{2R\theta}{\pi}$ et, l'exponentielle étant croissante, $e^{-R \sin \theta} \leq e^{-2R\theta/\pi}$. Par croissance de l'intégrale ($0 < \frac{\pi}{2}$), $K(R) \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} \, d\theta$. De plus, $e^{-R \sin \theta} > 0$ et la fonction est continue, donc $K(R) > 0$.
3. $\int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} \, d\theta = \left[-\frac{\pi}{2R} e^{-2R\theta/\pi}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R})$. Comme $0 < 1 - e^{-R} < 1$, $0 < K(R) \leq \frac{\pi}{2R}$. Quand $R \rightarrow +\infty$, $\frac{\pi}{2R} \rightarrow 0$ et, par le théorème des gendarmes, $\lim_{R \rightarrow +\infty} K(R) = 0$.

D9.

1. Le quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$ est défini si et seulement si $\cos x \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) : c'est D . Si $x \in D$, $\cos(-x) = \cos x \neq 0$ et $\cos(x + \pi) = -\cos x \neq 0$, donc $-x \in D$ et $x + \pi \in D$. Alors

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x, \quad \tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

Conclusion : $\tan$ est impaire et π -périodique sur D .

2. Comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur D :

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) > 0$: $\tan$ est strictement croissante. Quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, $\sin x \rightarrow 1$ et $\cos x \rightarrow 0^+$

(car $\cos x > 0$ sur cet intervalle), donc $\tan x \rightarrow +\infty$. Par imparité, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	+	
$\tan x$	$-\infty$	$+\infty$

3. $\tan$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, avec pour limites $-\infty$ et $+\infty$: tout réel y appartient à l'intervalle image. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $\tan x = y$ admet une unique solution dans cet intervalle.

$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$: par unicité, $\frac{\pi}{4}$ est la solution de $\tan x = 1$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Par π -périodicité, chaque intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ contient exactement une solution, $\frac{\pi}{4} + k\pi$.

$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$, donc par imparité $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ et les solutions de $\tan x = -\sqrt{3}$ sont les $-\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Conclusion : $\tan x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ et $\tan x = -\sqrt{3} \iff x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

4. $\tan 0 = 0$ et $\tan'(0) = 1 + 0 = 1$: la tangente en 0 a pour équation $y = x$. Pour $h(x) = \tan x - x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $h'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$, donc h est croissante et $h(0) = 0$: $h(x) \geq 0$, soit $\tan x \geq x$. Avec $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$:

Conclusion : $\sin x \leq x \leq \tan x$ pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. $\tan''(x) = (1 + \tan^2 x)' = 2 \tan x \times \tan'(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$. Comme $1 + \tan^2 x > 0$, $\tan''$ a le signe de $\tan x$: positif sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, négatif sur $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Conclusion : $\tan$ est convexe sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, concave sur $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; $\tan''$ s'annule en changeant de signe en 0 : l'origine est un point d'inflexion (la tangente $y = x$ traverse la courbe).