

Sinus et cosinus**Fiche Bases**

Nom : _____

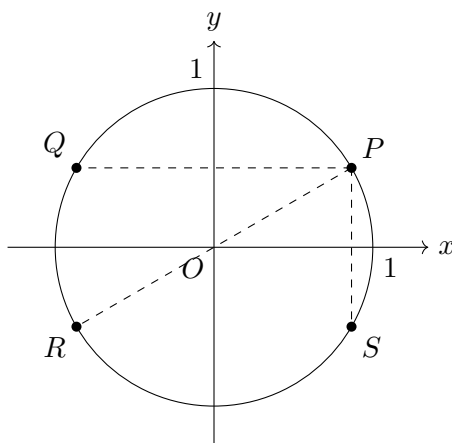
Date : _____

Exercice B1 : Radians et valeurs remarquables

1. Convertir en radians : 150° , 225° , 300° . Convertir en degrés : $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{2\pi}{9}$.
2. Donner la valeur exacte de : $\cos \frac{2\pi}{3}$; $\sin \frac{5\pi}{6}$; $\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\sin \frac{4\pi}{3}$; $\cos \frac{11\pi}{6}$; $\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
3. En se ramenant à un réel de $] -\pi ; \pi]$, calculer $\cos \frac{25\pi}{3}$ et $\sin \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$.

Exercice B2 : Lecture sur le cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique. Le point P est associé au réel $\frac{\pi}{6}$. Les points Q , R et S sont les symétriques de P respectivement par rapport à l'axe des ordonnées, par rapport à O et par rapport à l'axe des abscisses (voir la figure).



1. Donner les coordonnées exactes de P .
2. En déduire, pour Q , R et S , la mesure en radians appartenant à $] -\pi ; \pi]$ du réel associé, puis les coordonnées exactes.
3. En déduire $\cos \frac{5\pi}{6}$, $\sin \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice B3 : Angles associés

1. Simplifier, pour tout réel x :

$$A(x) = \sin(\pi - x) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(x + \pi) ;$$

$$B(x) = \cos(\pi + x) + \sin \left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(-x) ;$$

$$C(x) = \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) .$$

2. On pose $a = \cos \frac{\pi}{8}$. Exprimer en fonction de a : $\cos \frac{7\pi}{8}$, $\sin \frac{3\pi}{8}$ et $\cos \frac{9\pi}{8}$.

Exercice B4 : Relation fondamentale et angles associés

1. Sachant que $\cos x = \frac{5}{13}$ et $x \in [-\pi ; 0]$, calculer $\sin x$.
2. Sachant que $\sin y = -\frac{4}{5}$ et $y \in \left[\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$, calculer $\cos y$.
3. Avec les données de la question 1, donner les valeurs exactes de $\cos(\pi - x)$, de $\sin(-x)$ et de $\cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

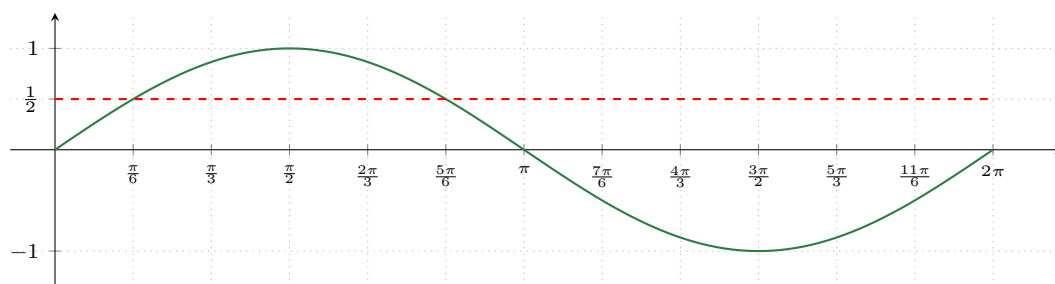
Exercice B5 : Équations trigonométriques

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle indiqué :

1. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $] -\pi ; \pi]$;
2. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0 ; 2\pi]$;
3. $\sin x = -\frac{1}{2}$ dans $[0 ; 2\pi]$;
4. $\cos 2x = \frac{1}{2}$ dans $[0 ; 2\pi]$.

Exercice B6 : Inéquations trigonométriques

On donne la courbe de la fonction sinus sur $[0 ; 2\pi]$ et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.



1. Lire graphiquement l'ensemble des solutions de $\sin x \geq \frac{1}{2}$ sur $[0 ; 2\pi]$, puis le justifier par le calcul.
2. Résoudre $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi ; \pi]$.
3. Résoudre $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0 ; 2\pi]$.

Exercice B7 : Dérivées

1. Calculer la dérivée de chaque fonction, définie sur $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \sin(3x) + \cos x ; \quad f_2(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) ; \quad f_3(x) = 3x - 2 \sin x ;$$

$$f_4(x) = \sin^2 x ; \quad f_5(x) = x \cos x.$$

2. Calculer $f_1'(0)$ et $f_3'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction sinus au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$.

Exercice B8 : Parité et périodicité

1. Pour chaque fonction, étudier la parité et donner une période (en justifiant) : $f(x) = \cos(3x)$; $g(x) = \sin \frac{x}{2}$; $h(x) = \cos x + \sin x$.
2. Pour la fonction f , indiquer un intervalle sur lequel il suffit de l'étudier pour connaître sa courbe, et expliquer comment compléter la courbe.

Exercice B9 : Limites et Python

1. Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$.
2. Déterminer, en justifiant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \sin x)$.
3. On exécute le programme suivant.

```

from math import sin
for k in range(1, 5):
    h = 10**(-k)
    print(h, sin(h)/h)

```

Quelle propriété du cours ce programme illustre-t-il ? Donner une valeur approchée de la première valeur de $\frac{\sin h}{h}$ affichée (pour $h = 0,1$).

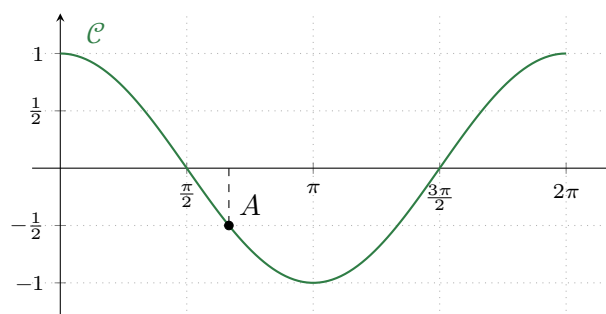
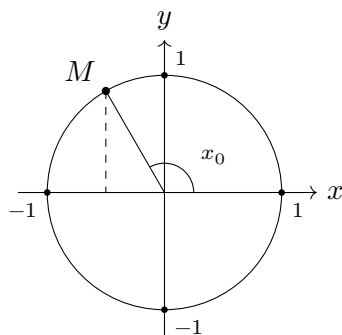
Exercice B10 : Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier.

1. Pour tout réel x , $\cos(x + \pi) = \cos x$.
2. L'équation $\cos x = \frac{2}{3}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
3. Pour tout réel x , $\cos 2x = 2 \cos x$.
4. La fonction sinus est croissante sur $[0; \pi]$.
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 0$.

Exercice B11 : Du cercle trigonométrique à la courbe du cosinus

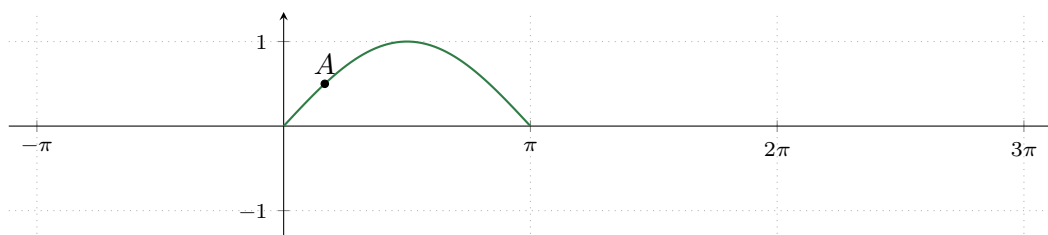
À gauche, le cercle trigonométrique, sur lequel le point M est associé au réel $x_0 = \frac{2\pi}{3}$. À droite, la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction cosinus sur $[0; 2\pi]$; le point A a pour abscisse x_0 .



1. Lire sur le cercle les coordonnées exactes de M . En déduire $\cos x_0$ et $\sin x_0$, puis justifier que l'ordonnée de A vaut $-\frac{1}{2}$.
2. Sur le cercle, quel est l'autre point dont l'abscisse est égale à celle de M ? Quel réel de $[0; 2\pi]$ lui est associé ? En déduire les solutions dans $[0; 2\pi]$ de $\cos x = -\frac{1}{2}$, puis les repérer sur la courbe $\mathcal{C}$ comme abscisses des points d'intersection avec la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.
3. Lire sur le cercle, puis sur la courbe $\mathcal{C}$, l'ensemble des réels $x \in [0; 2\pi]$ tels que $\cos x > 0$.
4. À la calculatrice (mode radian), on obtient $\cos^{-1}(0,3) \approx 1,2661$. En déduire les solutions de l'équation $\cos x = 0,3$ dans $[-\pi; \pi]$ (valeurs approchées au centième), et expliquer pourquoi la parité du cosinus donne la seconde solution.

Exercice B12 : Parité et périodicité sur la courbe du sinus

On a tracé la courbe de la fonction sinus sur $[0; \pi]$ seulement.



Le point A de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe.

1. Par quelle transformation obtient-on la courbe sur $[-\pi; 0]$ à partir de la courbe sur $[0; \pi]$? Compléter la courbe sur $[-\pi; 0]$.
2. Par quelle transformation obtient-on la courbe sur $[\pi; 2\pi]$ à partir de la courbe sur $[-\pi; 0]$? Compléter la courbe sur $[\pi; 3\pi]$.
3. Sans calcul, donner les ordonnées des points de la courbe d'abscisses $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$. Justifier chaque réponse avec la parité ou la périodicité.
4. Un élève affirme : « la courbe du cosinus sur $[-\pi; \pi]$ se déduit de celle sur $[0; \pi]$ par une symétrie de centre O ». A-t-il raison ? Que doit-on dire pour le cosinus ?