

Corrigé : Sinus et cosinus**Fiche Bases****B1.**

- On utilise $x^\circ = x \times \frac{\pi}{180}$ radians. $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$, $225^\circ = \frac{5\pi}{4}$, $300^\circ = \frac{5\pi}{3}$. Réciproquement, $\frac{7\pi}{6} = \frac{7}{6} \times 180^\circ = 210^\circ$ et $\frac{2\pi}{9} = \frac{2}{9} \times 180^\circ = 40^\circ$.
- $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
- $\frac{25\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 8\pi = \frac{\pi}{3} + 4 \times 2\pi$, donc $\cos \frac{25\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Ensuite $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

B2.

- P est associé à $\frac{\pi}{6}$: $P\left(\cos \frac{\pi}{6}; \sin \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
- Q est le symétrique de P par rapport à l'axe des ordonnées : on change le signe de l'abscisse, $Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Il est associé à $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.
 R est le symétrique de P par rapport à O : $R\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, associé à $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, soit $-\frac{5\pi}{6}$ dans $]-\pi; \pi]$.
 S est le symétrique de P par rapport à l'axe des abscisses : $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, associé à $-\frac{\pi}{6}$.
- Lecture des coordonnées : $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (abscisse de Q), $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ (ordonnée de R),
 $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (abscisse de S).

B3.

- $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$. Donc $A(x) = \sin x + \sin x + \sin x = 3\sin x$.
 $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, $\cos(-x) = \cos x$. Donc $B(x) = -\cos x + \cos x - \cos x = -\cos x$.
 $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ (parité du cosinus) et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Donc $C(x) = \sin x + \cos x$.
- $\cos \frac{7\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos \frac{\pi}{8} = -a$; $\sin \frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{8} = a$; $\cos \frac{9\pi}{8} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) = -a$.

B4.

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donne $\sin^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$, donc $\sin x = \pm \frac{12}{13}$. Sur $[-\pi; 0]$, $\sin x \leq 0$:
 $\sin x = -\frac{12}{13}$.
- $\cos^2 y = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$, donc $\cos y = \pm \frac{3}{5}$. Sur $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos y \leq 0$: $\cos y = -\frac{3}{5}$.
- Par lecture du cercle trigonométrique (angles associés) : $\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{5}{13}$; $\sin(-x) = -\sin x = \frac{12}{13}$; $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = \frac{12}{13}$.
Vérification : $\left(-\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25 + 144}{169} = 1$ ($\cos(\pi - x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$ sont les coordonnées

d'un point du cercle).

B5.

1. Comme $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, l'équation s'écrit $\cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$, donc $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans $] -\pi; \pi]$: $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$.
2. Comme $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0; 2\pi]$: $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$.
3. Comme $\sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}$: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0; 2\pi]$: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$ (pour $k = 1$) et $\frac{7\pi}{6}$ (pour $k = 0$). $\mathcal{S} = \left\{ \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$.
4. Comme $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$: $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0; 2\pi]$: la première famille donne $\frac{\pi}{6}$ ($k = 0$) et $\frac{7\pi}{6}$ ($k = 1$) ; la seconde donne $\frac{5\pi}{6}$ ($k = 1$) et $\frac{11\pi}{6}$ ($k = 2$). $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$.

B6.

1. Graphiquement, la courbe est au-dessus ou sur la droite entre les abscisses $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. Par le calcul : $\sin x = \frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$ équivaut à $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$, et le sinus est croissant sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, décroissant sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et négatif sur $[\pi; 2\pi]$, donc il est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$ exactement entre ces deux valeurs. Conclusion : $\mathcal{S} = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$.
2. $\cos x = -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$ équivaut à $x = \pm \frac{2\pi}{3}$. Le cosinus est décroissant sur $[0; \pi]$, donc $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ sur $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi \right]$; par parité, c'est aussi vrai sur $\left[-\pi; -\frac{2\pi}{3} \right]$ et faux ailleurs. Conclusion : $\mathcal{S} = \left[-\pi; -\frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi \right]$.
3. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0; 2\pi]$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$. Par les variations du sinus (croissant jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, décroissant ensuite jusqu'à $\frac{3\pi}{2}$, puis croissant), il est strictement supérieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\left] \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right[$ et strictement inférieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en dehors de $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$. Conclusion : $\mathcal{S} = \left[0; \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{3\pi}{4}; 2\pi \right]$.

B7.

1. $f'_1(x) = 3 \cos(3x) - \sin x$; $f'_2(x) = -2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$; $f'_3(x) = 3 - 2 \cos x$; $f'_4(x) = 2 \sin x \cos x$ (c'est $\sin 2x$) ; $f'_5(x) = \cos x - x \sin x$ (dérivée d'un produit).
2. $f'_1(0) = 3 \cos 0 - \sin 0 = 3$. $f'_3 \left(\frac{\pi}{3} \right) = 3 - 2 \cos \frac{\pi}{3} = 3 - 1 = 2$.
3. Pour $f = \sin$ en $a = \frac{\pi}{6}$: $f(a) = \frac{1}{2}$ et $f'(a) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. La tangente a pour équation $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2}$, soit $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$.

B8.

1. f : pour tout x , $f(-x) = \cos(-3x) = \cos 3x = f(x)$, donc f est paire ; $f \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos(3x + 2\pi) = \cos 3x = f(x)$, donc $\frac{2\pi}{3}$ est une période.

$g : g(-x) = \sin\left(-\frac{x}{2}\right) = -g(x)$, donc g est impaire ; $g(x + 4\pi) = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = g(x)$, donc 4π est une période.

$h : h(x + 2\pi) = h(x)$, donc 2π est une période. Pour la parité, $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ et $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Comme $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq h\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -h\left(\frac{\pi}{4}\right)$, h n'est ni paire ni impaire.

2. f est $\frac{2\pi}{3}$ -périodique : on l'étudie sur un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{3}$, par exemple $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$. Comme f est paire, il suffit d'étudier $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, puis de compléter par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et par translations de vecteur $\frac{2\pi}{3}\vec{i}$.

B9.

1. $\frac{\sin(4x)}{x} = 4 \times \frac{\sin(4x)}{4x} \rightarrow 4 \times 1 = 4$. $\frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3} \times \frac{\sin x}{x} \rightarrow \frac{1}{3}$. $\frac{\cos x - 1}{x}$ est le taux de variation de $\cos$ en 0 : sa limite est $\cos'(0) = -\sin 0 = 0$.
2. Pour $x > 0$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donne $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Les deux bornes tendent vers 0 : par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.
Pour tout x , $\sin x \geq -1$, donc $2x + \sin x \geq 2x - 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$, par comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \sin x) = +\infty$.
3. Le programme illustre $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$: les valeurs affichées de $\frac{\sin h}{h}$ se rapprochent de 1 quand $h = 10^{-k}$ tend vers 0. Pour $h = 0,1$: $\frac{\sin 0,1}{0,1} \approx 0,9983$.

B10.

1. **Faux.** Pour $x = 0$: $\cos(\pi) = -1 \neq 1 = \cos 0$. En fait $\cos(x + \pi) = -\cos x$.
2. **Vrai.** $\frac{2}{3} \in [-1; 1]$: le cercle trigonométrique rencontre la droite d'équation $x = \frac{2}{3}$. Il existe a tel que $\cos a = \frac{2}{3}$ (le cosinus est continu et prend les valeurs 1 en 0 et 0 en $\frac{\pi}{2}$, donc toute valeur de $[0; 1]$ par le théorème des valeurs intermédiaires). L'équation $\cos x = \cos a$ a alors pour solutions $\pm a + 2k\pi$.
3. **Faux.** Pour $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos \pi = -1$ et $2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$.
4. **Faux.** $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4}$ mais $\sin \frac{\pi}{2} = 1 > \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{3\pi}{4}$. Le sinus croît sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis décroît sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
5. **Faux.** Pour $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $\sin x_n = 1$ pour tout n , et $x_n \rightarrow +\infty$. Si la limite valait 0, on aurait $\sin x_n \rightarrow 0$, ce qui est faux. (En réalité, le sinus n'a pas de limite en $+\infty$.)

B11.

1. Le point M est associé à $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$: il est le symétrique, par rapport à l'axe des ordonnées, du point associé à $\frac{\pi}{3}$ (de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$). On lit $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: l'abscisse de M est $\cos x_0$ et son ordonnée est $\sin x_0$.
Conclusion : $\cos x_0 = -\frac{1}{2}$ et $\sin x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le point A de la courbe a pour coordonnées $(x_0; \cos x_0)$, donc son ordonnée est $-\frac{1}{2}$ (c'est l'abscisse de M , reportée sur l'axe des ordonnées de la courbe).
2. L'autre point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ sur le cercle est le symétrique M' de M par rapport à l'axe des abscisses : $M'\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Il est associé à $-\frac{2\pi}{3}$, donc à $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$ dans $[0; 2\pi]$. Les points du cercle

d'abscisse $-\frac{1}{2}$ sont M et M' seulement.

Conclusion : dans $[0; 2\pi]$, $\cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$. Sur la courbe, ce sont les abscisses $\approx 2,09$ et $\approx 4,19$ des deux points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite $y = -\frac{1}{2}$ (symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \pi$).

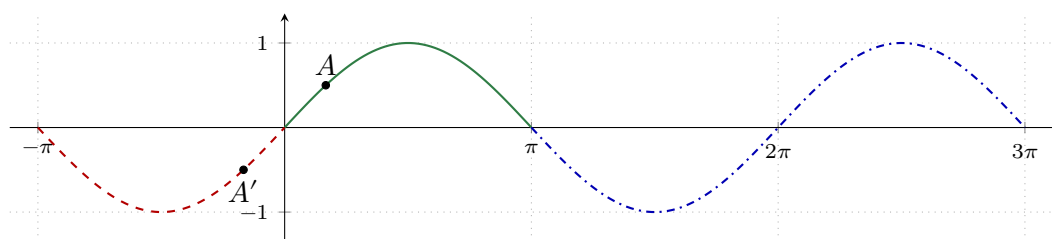
3. Sur le cercle, $\cos x > 0$ pour les points d'abscisse strictement positive, c'est-à-dire l'arc situé à droite de l'axe des ordonnées. Sur la courbe, ce sont les parties de $\mathcal{C}$ strictement au-dessus de l'axe des abscisses.

Conclusion : $\cos x > 0 \iff x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

4. La calculatrice donne la solution $\alpha \approx 1,2661$ de $\cos x = 0,3$ dans $[0; \pi]$. Le cosinus étant pair, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha = 0,3$: $-\alpha$ est aussi solution (sur le cercle, c'est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du point associé à α). Il n'y en a pas d'autre dans $[-\pi; \pi]$, car $\cos x = \cos \alpha \iff x = \pm \alpha + 2k\pi$.

Conclusion : les solutions dans $[-\pi; \pi]$ sont $x \approx -1,27$ et $x \approx 1,27$.

B12.



1. La fonction sinus est impaire : $\sin(-x) = -\sin x$. Le point $(-x; \sin(-x))$ est donc le symétrique du point $(x; \sin x)$ par rapport à O .

Conclusion : la courbe sur $[-\pi; 0]$ (en tirets rouges) est le symétrique, par rapport à l'origine O , de la courbe sur $[0; \pi]$.

2. Le sinus est 2π -périodique : $\sin(x+2\pi) = \sin x$. Le point $(x+2\pi; \sin x)$ s'obtient à partir de $(x; \sin x)$ par la translation de vecteur $2\pi \vec{i}$.

Conclusion : la courbe sur $[\pi; 2\pi]$ est l'image de la courbe sur $[-\pi; 0]$ par la translation de vecteur $2\pi \vec{i}$, et la courbe sur $[2\pi; 3\pi]$ celle de la courbe sur $[0; \pi]$ par la même translation (traits mixtes bleus).

3. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ (parité).

$$\sin \frac{13\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \frac{1}{2} \text{ (périodicité).}$$

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \text{ (périodicité puis parité).}$$

Conclusion : les ordonnées sont $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

4. Non. Une symétrie de centre O traduit l'imparité (cas du sinus). Le cosinus est pair : $\cos(-x) = \cos x$, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Contre-exemple pour la symétrie centrale : le point $(0; 1)$ est sur la courbe du cosinus, mais son symétrique par rapport à O , $(0; -1)$, n'y est pas.

Conclusion : la courbe du cosinus sur $[-\pi; 0]$ est le symétrique de celle sur $[0; \pi]$ par rapport à l'axe des ordonnées.