

# Fiche 3 : limites, suites et équations avec sin et cos

Six exercices sur :

- les limites avec **sin** et **cos** (nombres dérivés, gendarmes, limites en l'infini) ;
- les suites trigonométriques ( $\pi$  comme limite de  $n \sin \frac{\pi}{n}$ ) ;
- une équation à solution unique (l'équation de Kepler) ;
- une approximation de  $\pi$  avec Python.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- règle nommée à chaque limite ;
- encadrement écrit avec son domaine de validité ;
- hypothèses du corollaire du TVI vérifiées.

## Les réflexes à avoir en tête

- **En 0** :  $\frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$  quand  $X \rightarrow 0$  ;  $\frac{\cos x - 1}{x} \rightarrow 0$  ; factorise pour faire apparaître  $\frac{\sin X}{X}$ .
- **En  $\pm\infty$**  : encadre avec  $-1 \leq \sin \leq 1$ , puis gendarmes ou comparaison. Ne parle jamais de « la limite de  $\sin x$  ».
- **Changement de variable** :  $x \sin \frac{1}{x}$  en  $+\infty$  devient  $\frac{\sin X}{X}$  avec  $X = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ .
- **Suites** : si  $u_n \rightarrow 0$ , alors  $\frac{\sin(u_n)}{u_n} \rightarrow 1$ .

## Les pièges classiques

- Écrire «  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 0$  » : la limite n'existe pas.
- Écrire  $\frac{\sin(3x)}{x} \rightarrow 1$  : c'est 3, il faut compenser le facteur 3.
- Diviser un encadrement par une quantité **sans connaître son signe**.
- Oublier que  $\frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$  exige  $X \rightarrow 0$ .

Le sinus a beau osciller, il reste poli : il ne dépasse jamais 1. C'est ce qui permet de le coincer.

**Exercice 1 (★★) : limites en 0****Déterminer :**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$

**Exercice 2 (★★) : limites en  $+\infty$  avec des encadrements****Déterminer en  $+\infty$  :**

1.  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

2.  $g(x) = \frac{x + \cos x}{x}$

3.  $h(x) = x \sin \frac{1}{x}$

4.  $k(x) = e^{-x} \cos x$

5.  $m(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$

6.  $p(x) = x + \sin x$

**Exercice 3 (★★★) : la limite de  $\frac{1 - \cos x}{x^2}$** 

On admet que, pour  $x \geq 0$ ,  $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$  et  $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$  (fiche 2, exercice 7).

1. Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ .

2. En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ , puis  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

**Exercice 4 (★★) : suites trigonométriques**

Déterminer la limite de :

1.  $u_n = n \sin \frac{1}{n}$

2.  $v_n = n \sin \frac{\pi}{n}$

3.  $w_n = \frac{\sin n}{n}$

4.  $t_n = n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$

5.  $s_n = n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$

**Exercice 5 (★★★) : l'équation de Kepler  $x - \sin x = 1$** Soit  $h(x) = x - \sin x - 1$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $h$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer les limites de  $h$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
3. Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ , et l'encadrer à  $10^{-1}$  près.

**Exercice 6 (★★) : approcher  $\pi$  avec Python**

1. Écrire une fonction Python `approx(n)` qui renvoie  $n \sin \frac{\pi}{n}$ , puis donner les valeurs pour  $n = 10, 100, 1\,000$ .
2. Montrer que  $0 \leq \pi - n \sin \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi^3}{6n^2}$  pour tout  $n \geq 1$ , et vérifier la cohérence avec les valeurs.

**Ce qui peut tomber au bac**

- Des **limites en 0** avec  $\frac{\sin X}{X}$  (exercices 1 et 3).
- Des **limites en l'infini** avec encadrement par  $-1$  et  $1$  (exercice 2).
- Des **suites trigonométriques**, dont  $n \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow \pi$  (exercice 4).
- Une **équation à solution unique** avec  $\sin$  ou  $\cos$  et un encadrement (exercice 5).
- Une **approximation avec Python** et un encadrement de l'erreur (exercice 6).

**QCM : une seule bonne réponse par question**

1. Quelle est la limite de  $\frac{\sin x}{x}$  quand  $x \rightarrow 0$  ?
  - A. 1
  - B. 0
  - C.  $+\infty$
  - D. La limite n'existe pas
2. Quelle est la limite de  $\cos x$  quand  $x \rightarrow +\infty$  ?
  - A. La limite n'existe pas
  - B. 0
  - C. 1
  - D.  $+\infty$
3. Quelle est la limite de  $\frac{\sin x}{x}$  quand  $x \rightarrow +\infty$  ?
  - A. 1
  - B. 0
  - C. La limite n'existe pas
  - D.  $+\infty$
4. Quelle est la limite de  $n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$  quand  $n \rightarrow +\infty$  ?
  - A. 1
  - B. 0
  - C.  $+\infty$
  - D. La limite n'existe pas
5. Quelle est la limite de  $\frac{1 - \cos x}{x}$  quand  $x \rightarrow 0$  ?
  - A.  $+\infty$
  - B. 1
  - C. 0
  - D.  $\frac{1}{2}$
6. Dans l'exercice 1, quelle est la limite en 0 de  $\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$  ?
  - A. 1
  - B.  $\frac{2}{5}$
  - C.  $\frac{5}{2}$
  - D. 10

7. Dans l'exercice 3, quelle est la limite de  $\frac{1 - \cos x}{x^2}$  quand  $x \rightarrow 0$  ?
- A.  $\frac{1}{2}$
  - B. 1
  - C.  $+\infty$
  - D. 0
8. Dans l'exercice 4, quelle est la limite de  $t_n = n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$  ?
- A. 1
  - B.  $+\infty$
  - C.  $\frac{1}{2}$
  - D. 0
9. Dans l'exercice 5 (équation de Kepler  $x - \sin x = 1$ ), quel encadrement obtient-on pour la solution  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près ?
- A.  $0 < \alpha < 1$
  - B.  $1,9 < \alpha < 2$
  - C.  $2 < \alpha < 3$
  - D.  $1 < \alpha < 1,5$
10. Dans l'exercice 6, l'encadrement  $0 \leq \pi - n \sin \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi^3}{6n^2}$  permet de montrer que  $n \sin \frac{\pi}{n}$  :
- A. tend vers 1
  - B. ne converge pas
  - C. tend vers 0
  - D. tend vers  $\pi$  quand  $n \rightarrow +\infty$