

Fiche 3 : limites, suites et équations avec sin et cos

Six exercices sur :

- les limites avec **sin** et **cos** (nombres dérivés, gendarmes, limites en l'infini) ;
- les suites trigonométriques (π comme limite de $n \sin \frac{\pi}{n}$) ;
- une équation à solution unique (l'équation de Kepler) ;
- une approximation de π avec Python.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- règle nommée à chaque limite ;
- encadrement écrit avec son domaine de validité ;
- hypothèses du corollaire du TVI vérifiées.

Les réflexes à avoir en tête

- **En 0** : $\frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$ quand $X \rightarrow 0$; $\frac{\cos x - 1}{x} \rightarrow 0$; factorise pour faire apparaître $\frac{\sin X}{X}$.
- **En $\pm\infty$** : encadre avec $-1 \leq \sin \leq 1$, puis gendarmes ou comparaison. Ne parle jamais de « la limite de $\sin x$ ».
- **Changement de variable** : $x \sin \frac{1}{x}$ en $+\infty$ devient $\frac{\sin X}{X}$ avec $X = \frac{1}{x} \rightarrow 0$.
- **Suites** : si $u_n \rightarrow 0$, alors $\frac{\sin(u_n)}{u_n} \rightarrow 1$.

Les pièges classiques

- Écrire « $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 0$ » : la limite n'existe pas.
- Écrire $\frac{\sin(3x)}{x} \rightarrow 1$: c'est 3, il faut compenser le facteur 3.
- Diviser un encadrement par une quantité **sans connaître son signe**.
- Oublier que $\frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$ exige $X \rightarrow 0$.

Le sinus a beau osciller, il reste poli : il ne dépasse jamais 1. C'est ce qui permet de le coincer.

Exercice 1 (★★) : limites en 0**Déterminer :**

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$

Correction de l'exercice 1**Méthode**

On utilise $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ (nombre dérivé de sin en 0).

Question 1

Pour $x \neq 0$: $\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x}$. Quand $x \rightarrow 0$, $X = 3x \rightarrow 0$, donc $\frac{\sin(3x)}{3x} \rightarrow 1$. Par produit :

$$\lim = 3$$

Question 2

Pour $x \neq 0$ proche de 0 :

$$\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} = \frac{\frac{\sin(5x)}{5x} \times 5x}{\frac{\sin(2x)}{2x} \times 2x} = \frac{5}{2} \times \frac{\frac{\sin(5x)}{5x}}{\frac{\sin(2x)}{2x}}$$

Les deux quotients tendent vers 1. Par quotient :

$$\lim = \frac{5}{2}$$

Question 3

$\frac{\cos x - \cos 0}{x - 0}$ est le taux d'accroissement de cos en 0. Il tend vers $\cos'(0) = -\sin 0 = 0$.

$$\lim = 0$$

Question 4

$$\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin x}{x} \rightarrow \frac{1}{2} \times 1$$

$$\lim = \frac{1}{2}$$

Exercice 2 (★★) : limites en $+\infty$ avec des encadrements**Déterminer en $+\infty$:**

1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

2. $g(x) = \frac{x + \cos x}{x}$

3. $h(x) = x \sin \frac{1}{x}$

4. $k(x) = e^{-x} \cos x$

5. $m(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$

6. $p(x) = x + \sin x$

Correction de l'exercice 2

Question 1

Pour $x > 0$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donne $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. Les deux bornes tendent vers 0. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim f = 0$$

Question 2

Pour $x > 0$, $g(x) = 1 + \frac{\cos x}{x}$. Et $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Par gendarmes, $\frac{\cos x}{x} \rightarrow 0$. Par somme :

$$\lim g = 1$$

Question 3

Pour $x > 0$, on pose $X = \frac{1}{x}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow 0^+$, et $h(x) = \frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$.

$$\lim h = 1$$

Question 4

Pour tout x , $-e^{-x} \leq e^{-x} \cos x \leq e^{-x}$ (car $e^{-x} > 0$ et $|\cos x| \leq 1$). Comme $e^{-x} \rightarrow 0$, d'après les gendarmes :

$$\lim k = 0$$

Question 5

Pour $x > 0$, $|x \sin x| \leq x$. Donc $-\frac{x}{x^2 + 1} \leq m(x) \leq \frac{x}{x^2 + 1}$. Or $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 0$.

D'après les gendarmes :

$$\lim m = 0$$

Question 6

Pour tout x , $\sin x \geq -1$, donc $p(x) \geq x - 1$. Comme $x - 1 \rightarrow +\infty$, par comparaison :

$$\lim p = +\infty$$

Exercice 3 (★★★) : la limite de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$

On admet que, pour $x \geq 0$, $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ et $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ (fiche 2, exercice 7).

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2}$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

Soit $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x$ sur $[0; +\infty[$. g est dérivable et :

$$g'(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

Donc $g'(x) \geq 0$ d'après l'inégalité admise sur le sinus. g est croissante, avec $g(0) = 1 - 1 = 0$.

Donc $g(x) \geq 0$.

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Question 2

$$\text{Pour } x > 0 : 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

$$\text{En retranchant } 1 : -\frac{x^2}{2} \leq \cos x - 1 \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

$$\text{En divisant par } x^2 > 0 : -\frac{1}{2} \leq \frac{\cos x - 1}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24}.$$

La borne de droite tend vers $-\frac{1}{2}$ quand $x \rightarrow 0^+$. D'après le théorème des gendarmes,

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$ est paire ($\cos$ est paire et x^2 aussi). Donc la limite à gauche est la même.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Exercice 4 (★★) : suites trigonométriques

Déterminer la limite de :

1. $u_n = n \sin \frac{1}{n}$

2. $v_n = n \sin \frac{\pi}{n}$

3. $w_n = \frac{\sin n}{n}$

4. $t_n = n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$

5. $s_n = n \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$

Correction de l'exercice 4

Question 1

Pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$. Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, par composition avec $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$:

$$\lim u_n = 1$$

Question 2

Pour $n \geq 1$, $v_n = \pi \times \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$. Comme $\frac{\pi}{n} \rightarrow 0$, $\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \rightarrow 1$. Par produit :

$$\lim v_n = \pi$$

Interprétation : chaque côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de rayon 1 mesure $2 \sin \frac{\pi}{n}$.

Donc $v_n = n \sin \frac{\pi}{n}$ est la moitié de son périmètre.

Il tend vers la moitié de la circonférence, soit π .

Question 3

Pour $n \geq 1$, $-1 \leq \sin n \leq 1$ donne $-\frac{1}{n} \leq w_n \leq \frac{1}{n}$. D'après les gendarmes :

$$\lim w_n = 0$$

Question 4

Pour $n \geq 1$, $t_n = \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}$. Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, d'après l'exercice 3 :

$$\lim t_n = \frac{1}{2}$$

Question 5

Pour $n \geq 1$, $s_n = \frac{1}{n} \times t_n$. Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $t_n \rightarrow \frac{1}{2}$, par produit :

$$\lim s_n = 0$$

Exercice 5 (★★★) : l'équation de Kepler $x - \sin x = 1$

Soit $h(x) = x - \sin x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et l'encadrer à 10^{-1} près.

Correction de l'exercice 5

Question 1

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 1 - \cos x \geq 0$. De plus $h'(x) = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). La dérivée ne s'annule qu'en des points isolés.

Donc $h' > 0$ sur chaque intervalle $]2k\pi; 2(k+1)\pi[$. h est strictement croissante sur chaque intervalle $[2k\pi; 2(k+1)\pi]$.

Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Question 2

Comme $-1 \leq \sin x \leq 1$, on a $x - 2 \leq h(x) \leq x$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $x - 2 \rightarrow +\infty$, donc par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h = +\infty$$

Quand $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow -\infty$, donc par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h = -\infty$$

Question 3

h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de $-\infty$ à $+\infty$.

Le nombre 0 est strictement compris entre ces limites.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Encadrement.

$$h(1) = -\sin 1 \approx -0,84 < 0$$

$$h(2) = 1 - \sin 2 \approx 0,09 > 0$$

Donc $1 < \alpha < 2$.

Puis $h(1,9) = 0,9 - \sin 1,9 \approx -0,046 < 0$ et $h(2) > 0$. Par stricte croissance :

$$1,9 < \alpha < 2$$

Exercice 6 (★★) : approcher π avec Python

1. Écrire une fonction Python `approx(n)` qui renvoie $n \sin \frac{\pi}{n}$, puis donner les valeurs pour $n = 10, 100, 1\,000$.
2. Montrer que $0 \leq \pi - n \sin \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi^3}{6n^2}$ pour tout $n \geq 1$, et vérifier la cohérence avec les valeurs.

Correction de l'exercice 6

Question 1

```
from math import sin, pi

def approx(n):
    return n*sin(pi/n)
```

Valeurs :

$$\text{approx}(10) \approx 3,0902$$

$$\text{approx}(100) \approx 3,14108$$

$$\text{approx}(1000) \approx 3,141587$$

Les valeurs se rapprochent de $\pi \approx 3,141593$.

Question 2

Pour $n \geq 1$, $x = \frac{\pi}{n} > 0$. Donc $\sin x \leq x$ et $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ (fiche 2, exercice 7).

En multipliant par $n > 0$:

$$n \sin \frac{\pi}{n} \leq \pi$$

$$n \sin \frac{\pi}{n} \geq \pi - n \times \frac{\pi^3}{6n^3} = \pi - \frac{\pi^3}{6n^2}$$

$$0 \leq \pi - n \sin \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi^3}{6n^2}$$

Cohérence : pour $n = 1\,000$, $\frac{\pi^3}{6n^2} \approx 5,17 \times 10^{-6}$. L'écart réel est $\pi - 3,141587 \approx 5,2 \times 10^{-6}$: l'encadrement est très précis. Pour $n = 100$, la borne vaut $\approx 5,17 \times 10^{-4}$. L'écart réel est $\approx 5,2 \times 10^{-4}$.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **limites en 0** avec $\frac{\sin X}{X}$ (exercices 1 et 3).
- Des **limites en l'infini** avec encadrement par -1 et 1 (exercice 2).
- Des **suites trigonométriques**, dont $n \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow \pi$ (exercice 4).
- Une **équation à solution unique** avec $\sin$ ou $\cos$ et un encadrement (exercice 5).
- Une **approximation avec Python** et un encadrement de l'erreur (exercice 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand $x \rightarrow 0$?

- A. 1 (**bonne réponse**)
- B. 0
- C. $+\infty$
- D. La limite n'existe pas

Justification : C'est le nombre dérivé de $\sin$ en 0 : $\cos 0 = 1$.

2. Quelle est la limite de $\cos x$ quand $x \rightarrow +\infty$?

- A. La limite n'existe pas (**bonne réponse**)
- B. 0
- C. 1
- D. $+\infty$

Justification : $\cos x$ oscille indéfiniment entre -1 et 1 .

3. Quelle est la limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$?

- A. 1
- B. 0 (**bonne réponse**)

C. La limite n'existe pas

D. $+\infty$

Justification : $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ pour $x > 0$: théorème des gendarmes.

4. Quelle est la limite de $n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \rightarrow +\infty$?

A. 1 (bonne réponse)

B. 0

C. $+\infty$

D. La limite n'existe pas

Justification : Avec $h = \frac{1}{n} \rightarrow 0$: $n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$.

5. Quelle est la limite de $\frac{1 - \cos x}{x}$ quand $x \rightarrow 0$?

A. $+\infty$

B. 1

C. 0 (bonne réponse)

D. $\frac{1}{2}$

Justification : $\frac{1 - \cos x}{x}$ est le taux d'accroissement en 0 de $1 - \cos x$, dont la dérivée en 0 est $\sin 0 = 0$.

6. Dans l'exercice 1, quelle est la limite en 0 de $\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$?

A. 1

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{5}{2}$ (bonne réponse)

D. 10

Justification : $\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} = \frac{\sin(5x)}{5x} \times \frac{2x}{\sin(2x)} \times \frac{5}{2} \rightarrow 1 \times 1 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.

7. Dans l'exercice 3, quelle est la limite de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ quand $x \rightarrow 0$?

A. $\frac{1}{2}$ (bonne réponse)

B. 1

C. $+\infty$

D. 0

Justification : L'encadrement $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$ donne, après division par x^2 , une limite égale à $\frac{1}{2}$.

8. Dans l'exercice 4, quelle est la limite de $t_n = n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$?

- A. 1
- B. $+\infty$
- C. $\frac{1}{2}$ (bonne réponse)
- D. 0

Justification : En posant $h = \frac{1}{n} \rightarrow 0$: $n^2(1 - \cos h) = \frac{1 - \cos h}{h^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ (résultat de l'exercice 3).

9. Dans l'exercice 5 (équation de Kepler $x - \sin x = 1$), quel encadrement obtient-on pour la solution α à 10^{-1} près ?

- A. $0 < \alpha < 1$
- B. $1,9 < \alpha < 2$ (bonne réponse)
- C. $2 < \alpha < 3$
- D. $1 < \alpha < 1,5$

Justification : h est strictement croissante, avec $h(1,9) < 0$ et $h(2) > 0$ (à vérifier par le calcul), ce qui encadre α .

10. Dans l'exercice 6, l'encadrement $0 \leq \pi - n \sin \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi^3}{6n^2}$ permet de montrer que $n \sin \frac{\pi}{n}$:

- A. tend vers 1
- B. ne converge pas
- C. tend vers 0
- D. tend vers π quand $n \rightarrow +\infty$ (bonne réponse)

Justification : Le majorant $\frac{\pi^3}{6n^2}$ tend vers 0 : par encadrement, $\pi - n \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow 0$, donc $n \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow \pi$.