

## Fiche 2 : études de fonctions trigonométriques

Huit exercices pour traiter toutes les études de fonctions avec  $\sin$  et  $\cos$  :

- dérivées ;
- parité et périodicité ;
- réduction de l'intervalle d'étude ;
- variations et extremums ;
- convexité et points d'inflexion ;
- tangentes ;
- inégalités classiques  $\sin x \leq x$ ,  $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ .

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- parité et périodicité justifiées ;
- dérivée factorisée ;
- signe justifié sur l'intervalle d'étude ;
- tableau complet ;
- prolongement à  $\mathbb{R}$ .

### Le plan d'une étude trigonométrique

1. **Domaine, parité, périodicité** : justifie chacune ( $f(-x) = \pm f(x)$ ,  $f(x+T) = f(x)$ ) et réduis l'intervalle d'étude.
2. **Dérivée** avec  $(\cos u)' = -u' \sin u$  et  $(\sin u)' = u' \cos u$  ; factorise (souvent avec  $\cos 2x$  ou  $\sin 2x$  à développer).
3. **Signe de  $f'$**  sur l'intervalle d'étude, avec le cercle trigonométrique ou un tableau de signes.
4. **Tableau de variations** avec les valeurs aux bornes et aux extremums.
5. **Prolongement à  $\mathbb{R}$**  : symétries et translations de période  $T$ .

### Les pièges classiques

- Oublier de **justifier** la parité ou la période.
- Étudier le signe de  $\sin$  ou  $\cos$  en oubliant l'**intervalle** ( $\sin x \geq 0$  seulement sur  $[0; \pi]$  dans  $[0; 2\pi]$ ).
- Ne pas **développer**  $\cos 2x$  ou  $\sin 2x$  avant de factoriser.
- Dire qu'une fonction avec un terme en  $x$  est périodique.

Une étude trigonométrique bien menée, c'est comme une chanson : une fois qu'on a le refrain, on n'a plus qu'à le répéter à chaque période.

**Exercice 1 (★) : dériver avec sin et cos****Dériver :**

1.  $f(x) = \sin(3x - 1)$

2.  $g(x) = \cos^2 x$

3.  $h(x) = x \sin x$

4.  $k(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$  (là où  $1 + \sin x \neq 0$ )

5.  $m(x) = e^{\cos x}$

6.  $p(x) = \ln(2 + \cos x)$

**Exercice 2 (★★) : parité et périodicité**

Pour chaque fonction, étudier la parité et la périodicité :

1.  $f(x) = \sin 2x$

2.  $g(x) = \cos^2 x$

3.  $h(x) = \sin x + \cos 2x$

4.  $k(x) = x + \sin x$

**Exercice 3 (★★) : l'étude de  $\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$** Soit  $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ . Justifier que  $f$  est paire et  $2\pi$ -périodique. Étudier  $f$  sur  $[0; \pi]$  et dresser son tableau de variations.**Exercice 4 (★★) :  $x + 2 \cos x$** Soit  $f(x) = x + 2 \cos x$  sur  $[0; 2\pi]$ . Étudier les variations de  $f$  et donner ses extremums locaux.

**Exercice 5 (★★★) : l'étude de  $\frac{\sin x}{2 + \cos x}$** 

Soit  $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ .

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , impaire et  $2\pi$ -périodique. Sur quel intervalle suffit-il de l'étudier ?
2. Montrer que  $f'(x) = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$ .
3. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; \pi]$  et en déduire que  $|f(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$  pour tout réel  $x$ .

**Exercice 6 (★★) : convexité de sin et cos**

1. Étudier la convexité de  $\sin$  sur  $[0; 2\pi]$  et déterminer ses points d'inflexion.
2. Étudier la convexité de  $\cos$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .
3. En déduire que  $\sin x \leq x$  pour tout  $x \geq 0$ .

**Exercice 7 (★★★) : les trois inégalités classiques**

1. Montrer que  $\sin x \leq x$  pour tout  $x \geq 0$ .
2. En déduire que  $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$  pour tout  $x \geq 0$ .
3. En déduire que  $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$  pour tout  $x \geq 0$ .
4. Retrouver  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}$ .

**Exercice 8 (★★) : tangentes**

1. Déterminer les tangentes à la courbe de  $\sin$  aux points d'abscisses 0 et  $\frac{\pi}{3}$ .
2. Déterminer la tangente à la courbe de  $\cos$  au point d'abscisse  $\frac{\pi}{2}$ , et sa position par rapport à la courbe.
3. Soit  $f(x) = \sin x \cos x$ . Déterminer la tangente en  $\frac{\pi}{4}$ .

**Ce qui peut tomber au bac**

- Des **dérivées** avec **sin**, **cos** et composées (exercice 1).
- Une **étude complète** avec parité, périodicité et intervalle réduit (exercices 2, 3, 4, 5).
- La **convexité** et les points d'inflexion de **sin** et **cos** (exercice 6).
- Des **inégalités** par études de fonctions successives (exercice 7).
- Des **tangentes** et leur position (exercice 8).

**QCM : une seule bonne réponse par question**

1. Quelle est la dérivée de  $\sin x$  ?
  - A.  $\sin x$
  - B.  $-\sin x$
  - C.  $-\cos x$
  - D.  $\cos x$
2. Quelle est la dérivée de  $\cos(2x)$  ?
  - A.  $2\cos(2x)$
  - B.  $-\sin(2x)$
  - C.  $2\sin(2x)$
  - D.  $-2\sin(2x)$
3. La fonction sinus est :
  - A.  $2\pi$ -périodique et impaire
  - B.  $\pi$ -périodique et paire
  - C.  $2\pi$ -périodique et paire
  - D. non périodique
4. Pour tout réel  $x$ ,  $\cos(-x)$  vaut :
  - A.  $\sin x$
  - B.  $-\cos x$
  - C.  $-\sin x$
  - D.  $\cos x$
5. Sur  $[0; \pi]$ , la fonction sinus admet pour maximum :
  - A.  $\frac{1}{2}$ , atteint en  $\frac{\pi}{6}$
  - B. 1, atteint en  $\frac{\pi}{2}$
  - C. 0, atteint en  $\frac{\pi}{2}$
  - D. 1, atteint en  $\pi$

6. Dans l'exercice 1, quelle est la dérivée de  $k(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$  ?
- A.  $\frac{\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2}$
  - B.  $\frac{1}{1 + \sin x}$
  - C.  $\frac{-1}{1 + \sin x}$
  - D.  $\frac{-\sin x}{1 + \sin x}$
7. Dans l'exercice 3, avec  $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ , quel est le maximum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ?
- A.  $\frac{3}{2}$ , atteint en 0
  - B.  $\frac{3}{4}$
  - C. 1
  - D. 2
8. Dans l'exercice 5, avec  $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ , quel encadrement obtient-on pour  $|f(x)|$  ?
- A.  $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$
  - B.  $|f(x)| \leq 1$
  - C.  $|f(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$
  - D.  $|f(x)| \leq 2$
9. Dans l'exercice 6, où se situe le point d'inflexion de la courbe de  $\sin$  sur  $[0; 2\pi]$  ?
- A.  $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$
  - B.  $(0; 0)$
  - C.  $(\pi; 0)$
  - D.  $(2\pi; 0)$
10. Dans l'exercice 7, quelle inégalité en déduit-on pour  $\cos x$  quand  $x \geq 0$  ?
- A.  $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2}$
  - B.  $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$
  - C.  $\cos x \geq x$
  - D.  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$