

Fiche 2 : études de fonctions trigonométriques

Huit exercices pour traiter toutes les études de fonctions avec $\sin$ et $\cos$:

- dérivées ;
- parité et périodicité ;
- réduction de l'intervalle d'étude ;
- variations et extremums ;
- convexité et points d'inflexion ;
- tangentes ;
- inégalités classiques $\sin x \leq x$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- parité et périodicité justifiées ;
- dérivée factorisée ;
- signe justifié sur l'intervalle d'étude ;
- tableau complet ;
- prolongement à $\mathbb{R}$.

Le plan d'une étude trigonométrique

1. **Domaine, parité, périodicité** : justifie chacune ($f(-x) = \pm f(x)$, $f(x+T) = f(x)$) et réduis l'intervalle d'étude.
2. **Dérivée** avec $(\cos u)' = -u' \sin u$ et $(\sin u)' = u' \cos u$; factorise (souvent avec $\cos 2x$ ou $\sin 2x$ à développer).
3. **Signe de f'** sur l'intervalle d'étude, avec le cercle trigonométrique ou un tableau de signes.
4. **Tableau de variations** avec les valeurs aux bornes et aux extremums.
5. **Prolongement à $\mathbb{R}$** : symétries et translations de période T .

Les pièges classiques

- Oublier de **justifier** la parité ou la période.
- Étudier le signe de $\sin$ ou $\cos$ en oubliant l'**intervalle** ($\sin x \geq 0$ seulement sur $[0; \pi]$ dans $[0; 2\pi]$).
- Ne pas **développer** $\cos 2x$ ou $\sin 2x$ avant de factoriser.
- Dire qu'une fonction avec un terme en x est périodique.

Une étude trigonométrique bien menée, c'est comme une chanson : une fois qu'on a le refrain, on n'a plus qu'à le répéter à chaque période.

Exercice 1 (★) : dériver avec sin et cos**Dériver :**

1. $f(x) = \sin(3x - 1)$

2. $g(x) = \cos^2 x$

3. $h(x) = x \sin x$

4. $k(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ (là où $1 + \sin x \neq 0$)

5. $m(x) = e^{\cos x}$

6. $p(x) = \ln(2 + \cos x)$

Correction de l'exercice 1

Question 1

 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée. Avec $(\sin u)' = u' \cos u$ et $u(x) = 3x - 1$:

$$f'(x) = 3 \cos(3x - 1)$$

Question 2

 $g = u^2$ avec $u(x) = \cos x$, $u'(x) = -\sin x$. Avec $(u^2)' = 2u'u$:

$$g'(x) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x$$

Question 3

 h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit.

$$h'(x) = \sin x + x \cos x$$

Question 4

 k est dérivable sur les intervalles où $1 + \sin x \neq 0$. Avec $\left(\frac{u}{v}\right)'$:

$$k'(x) = \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos x \times \cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2}$$

$$k'(x) = \frac{-1}{1 + \sin x}$$

Question 5

Avec $(e^u)' = u'e^u$ et $u(x) = \cos x$:

$$m'(x) = -\sin x e^{\cos x}$$

Question 6

Pour tout x , $2 + \cos x \geq 1 > 0$: p est dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$:

$$p'(x) = \frac{-\sin x}{2 + \cos x}$$

Exercice 2 (★★) : parité et périodicité

Pour chaque fonction, étudier la parité et la périodicité :

1. $f(x) = \sin 2x$

2. $g(x) = \cos^2 x$

3. $h(x) = \sin x + \cos 2x$

4. $k(x) = x + \sin x$

Correction de l'exercice 2

Toutes ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, ensemble symétrique par rapport à 0.

Question 1

$$f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$$

f est impaire.

$$f(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x = f(x)$$

f est π -périodique.

Question 2

$$g(-x) = (\cos(-x))^2 = \cos^2 x = g(x)$$

g est paire.

$$g(x + \pi) = (\cos(x + \pi))^2 = (-\cos x)^2 = \cos^2 x = g(x)$$

g est π -périodique.

Question 3

$$h(x + 2\pi) = \sin x + \cos(2x + 4\pi) = h(x)$$

h est 2π -périodique.

Pour la parité : $h(-x) = -\sin x + \cos 2x$. Ce n'est ni $h(x)$ (sinon $\sin x = 0$ pour tout x), ni $-h(x)$. Par exemple $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 1 = 0$ et $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 1 = -2$.

h n'est ni paire ni impaire.

Question 4

$$k(-x) = -x + \sin(-x) = -(x + \sin x) = -k(x)$$

k est impaire.

Elle n'est pas périodique : $k(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ (car $x + \sin x \geq x - 1$). Or une fonction périodique et continue est bornée.

k n'est pas périodique.

Exercice 3 (★★) : l'étude de $\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$

Soit $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$. Justifier que f est paire et 2π -périodique. Étudier f sur $[0; \pi]$ et dresser son tableau de variations.

Correction de l'exercice 3

Parité et périodicité

$$f(-x) = \cos(-x) + \frac{1}{2} \cos(-2x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x = f(x)$$

f est paire.

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + \frac{1}{2} \cos(2x + 4\pi) = f(x)$$

f est 2π -périodique.

On étudie f sur $[0; \pi]$, puis on complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et par translations de 2π .

Dérivée

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = -\sin x - \sin 2x = -\sin x - 2 \sin x \cos x$.

$$f'(x) = -\sin x (1 + 2 \cos x)$$

Signe sur $[0; \pi]$

$\sin x > 0$ sur $]0; \pi[$. $1 + 2 \cos x > 0 \iff \cos x > -\frac{1}{2} \iff x < \frac{2\pi}{3}$. (Sur $[0; \pi]$, $\cos x = -\frac{1}{2}$ pour $x = \frac{2\pi}{3}$.)

Donc $f' < 0$ sur $\left]0; \frac{2\pi}{3}\right[$, $f' \left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$ et $f' > 0$ sur $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.

Tableau de variations sur $[0; \pi]$

f est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, de $f(0) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ à $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$. Puis strictement croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$, de $-\frac{3}{4}$ à $f(\pi) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Le minimum est $-\frac{3}{4}$ (sur $[0; \pi]$ et sur $\mathbb{R}$).

Le maximum est $\frac{3}{2}$ (atteint en 0).

Exercice 4 (★★) : $x + 2 \cos x$

Soit $f(x) = x + 2 \cos x$ sur $[0; 2\pi]$. Étudier les variations de f et donner ses extremums locaux.

Correction de l'exercice 4

Dérivée

f est dérivable sur $[0; 2\pi]$ comme somme.

$$f'(x) = 1 - 2 \sin x$$

Signe

$f'(x) > 0 \iff \sin x < \frac{1}{2}$. Sur $[0; 2\pi]$, $\sin x = \frac{1}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{5\pi}{6}$. $\sin x < \frac{1}{2}$ sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right[$ et sur $\left]\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$. $\sin x > \frac{1}{2}$ sur $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right[$.

Donc $f' > 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right[$, $f' < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right[$, $f' > 0$ sur $\left]\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

Tableau

f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, de $f(0) = 2$ à $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 2,26$. f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$, jusqu'à $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} \approx 0,89$. f est strictement croissante sur $\left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$, jusqu'à $f(2\pi) = 2\pi + 2 \approx 8,28$.

Extremums locaux

Un maximum local $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ en $\frac{\pi}{6}$.

Un minimum local $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$ en $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 5 (★★★) : l'étude de $\frac{\sin x}{2 + \cos x}$

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π -périodique. Sur quel intervalle suffit-il de l'étudier ?
2. Montrer que $f'(x) = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$ et en déduire que $|f(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ pour tout réel x .

Correction de l'exercice 5

Question 1

Pour tout x , $\cos x \geq -1$, donc $2 + \cos x \geq 1 > 0$.

f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = \frac{-\sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$$

f est impaire.

$f(x + 2\pi) = f(x)$ car $\sin$ et $\cos$ sont 2π -périodiques.

f est 2π -périodique.

Par périodicité, on étudie sur $[-\pi; \pi]$; par imparité, sur $[0; \pi]$. On complète par symétrie par rapport à l'origine, puis par translations de 2π .

Question 2

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. Avec $\left(\frac{u}{v}\right)'$:

$$f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) - \sin x \times (-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

Question 3

Comme $(2 + \cos x)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 \cos x + 1$. Sur $[0; \pi]$: $2 \cos x + 1 > 0 \iff \cos x > -\frac{1}{2} \iff x < \frac{2\pi}{3}$. Donc $f' > 0$ sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$ et $f' < 0$ sur $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.

Tableau sur $[0; \pi]$: f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, de $f(0) = 0$ à $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Puis strictement décroissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$, de $\frac{\sqrt{3}}{3}$ à $f(\pi) = 0$.

Majoration : sur $[0; \pi]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Par imparité, sur $[-\pi; 0]$, $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(x) \leq 0$. Par périodicité, cet encadrement vaut sur $\mathbb{R}$.

$$|f(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ pour tout réel } x$$

Avec égalité en $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ (maximum) et en $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ (minimum).

Exercice 6 (★★) : convexité de sin et cos

1. Étudier la convexité de **sin** sur $[0; 2\pi]$ et déterminer ses points d'inflexion.
2. Étudier la convexité de **cos** sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
3. En déduire que **sin** $x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

Correction de l'exercice 6

Question 1

sin est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et **sin** $''(x) = -\sin x$.

Sur $[0; \pi]$, **sin** $x \geq 0$ donc **sin** $'' \leq 0$.

sin est **concave** sur $[0; \pi]$.

Sur $[\pi; 2\pi]$, **sin** $x \leq 0$ donc **sin** $'' \geq 0$.

sin est **convexe** sur $[\pi; 2\pi]$.

La convexité change en π (**sin** $''$ s'annule en changeant de signe).

Le point $(\pi; 0)$ est un point d'inflexion.

Plus généralement, tous les points $(k\pi; 0)$ sont des points d'inflexion.

Question 2

$$\cos''(x) = -\cos x.$$

Sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, **cos** $x \geq 0$ donc **cos** $'' \leq 0$.

cos est **concave**.

Sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, **cos** $x \leq 0$ donc **cos** $'' \geq 0$.

cos est **convexe**.

Les points $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right)$ sont des points d'inflexion.

Question 3

La tangente à la courbe de $\sin$ en 0 a pour équation $y = \sin 0 + \cos 0 \times x = x$. Comme $\sin$ est concave sur $[0; \pi]$, sa courbe est en dessous de cette tangente. Donc $\sin x \leq x$ pour $x \in [0; \pi]$.

Pour $x > \pi$: $\sin x \leq 1 < \pi < x$.

Donc $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 7 (★★★) : les trois inégalités classiques

1. Montrer que $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
2. En déduire que $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
3. En déduire que $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ pour tout $x \geq 0$.
4. Retrouver $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}$.

Correction de l'exercice 7

Question 1

Soit $g_1(x) = x - \sin x$ sur $[0; +\infty[$. g_1 est dérivable et $g_1'(x) = 1 - \cos x \geq 0$. Donc g_1 est croissante, avec $g_1(0) = 0$. Donc $g_1(x) \geq 0$.

$$\sin x \leq x \text{ pour } x \geq 0$$

Question 2

Soit $g_2(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. g_2 est dérivable et $g_2'(x) = -\sin x + x = g_1(x) \geq 0$ d'après la question 1. Donc g_2 est croissante, avec $g_2(0) = 0$. Donc $g_2(x) \geq 0$.

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \text{ pour } x \geq 0$$

Question 3

Soit $g_3(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. g_3 est dérivable et $g_3'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = g_2(x) \geq 0$ d'après la question 2. Donc g_3 est croissante, avec $g_3(0) = 0$. Donc $g_3(x) \geq 0$.

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \text{ pour } x \geq 0$$

Question 4

Pour $x > 0$, les questions 1 et 3 donnent $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$. En divisant par $x > 0$:

$$1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Comme $1 - \frac{x^2}{6} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0^+$, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Exercice 8 (★★) : tangentes

1. Déterminer les tangentes à la courbe de $\sin$ aux points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{3}$.
2. Déterminer la tangente à la courbe de $\cos$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$, et sa position par rapport à la courbe.
3. Soit $f(x) = \sin x \cos x$. Déterminer la tangente en $\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 8

Méthode

La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Question 1

$\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.

En 0 : $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.

$$y = x$$

$$\text{En } \frac{\pi}{3} : \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

Question 2

$\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$. En $\frac{\pi}{2}$: $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $-\sin \frac{\pi}{2} = -1$.

$$y = - \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - x$$

$\cos'' = -\cos$ s'annule en $\frac{\pi}{2}$ en changeant de signe (concave à gauche, convexe à droite). Ce point est un point d'inflexion.

La courbe traverse sa tangente.

Question 3

$$f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \text{ donc } f'(x) = \cos 2x.$$

$$\text{En } \frac{\pi}{4} : f \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

La tangente est $y = \frac{1}{2}$, horizontale.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **dérivées** avec **sin**, **cos** et composées (exercice 1).
- Une **étude complète** avec parité, périodicité et intervalle réduit (exercices 2, 3, 4, 5).
- La **convexité** et les points d'inflexion de **sin** et **cos** (exercice 6).
- Des **inégalités** par études de fonctions successives (exercice 7).
- Des **tangentes** et leur position (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la dérivée de $\sin x$?

- A. $\sin x$
- B. $-\sin x$
- C. $-\cos x$
- D. $\cos x$ (bonne réponse)

Justification : $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$.

2. Quelle est la dérivée de $\cos(2x)$?

- A. $2 \cos(2x)$
- B. $-\sin(2x)$
- C. $2 \sin(2x)$
- D. $-2 \sin(2x)$ (bonne réponse)

Justification : $(\cos u)' = -u' \sin u$ avec $u = 2x$ et $u' = 2$.

3. La fonction sinus est :

- A. 2π -périodique et impaire (bonne réponse)
- B. π -périodique et paire
- C. 2π -périodique et paire
- D. non périodique

Justification : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

4. Pour tout réel x , $\cos(-x)$ vaut :

- A. $\sin x$
- B. $-\cos x$

C. $-\sin x$ D. $\cos x$ (bonne réponse)*Justification* : La fonction cosinus est paire.5. Sur $[0; \pi]$, la fonction sinus admet pour maximum :A. $\frac{1}{2}$, atteint en $\frac{\pi}{6}$ B. 1, atteint en $\frac{\pi}{2}$ (bonne réponse)C. 0, atteint en $\frac{\pi}{2}$ D. 1, atteint en π *Justification* : $(\sin x)' = \cos x$ s'annule en $\frac{\pi}{2}$ en changeant de signe, et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.6. Dans l'exercice 1, quelle est la dérivée de $k(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$?A. $\frac{\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2}$ B. $\frac{1}{1 + \sin x}$ C. $\frac{-1}{1 + \sin x}$ (bonne réponse)D. $\frac{-\sin x}{1 + \sin x}$ *Justification* : Quotient : $\frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos x \cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-1 - \sin x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-1}{1 + \sin x}$.7. Dans l'exercice 3, avec $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$, quel est le maximum de f sur $\mathbb{R}$?A. $\frac{3}{2}$, atteint en 0 (bonne réponse)B. $\frac{3}{4}$

C. 1

D. 2

Justification : f est 2π -périodique et paire ; sur $[0; \pi]$, l'étude du signe de f' montre que le maximum est $f(0) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.8. Dans l'exercice 5, avec $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$, quel encadrement obtient-on pour $|f(x)|$?A. $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ B. $|f(x)| \leq 1$ C. $|f(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ (bonne réponse)D. $|f(x)| \leq 2$

Justification : L'étude des variations de f (impaire, 2π -périodique) donne un maximum de $\frac{\sqrt{3}}{3}$ sur $[0; \pi]$.

9. Dans l'exercice 6, où se situe le point d'inflexion de la courbe de $\sin$ sur $[0; 2\pi]$?

- A. $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$
- B. $(0; 0)$
- C. $(\pi; 0)$ (**bonne réponse**)
- D. $(2\pi; 0)$

Justification : $\sin$ est concave sur $[0; \pi]$ et convexe sur $[\pi; 2\pi]$: la convexité change en $x = \pi$.

10. Dans l'exercice 7, quelle inégalité en déduit-on pour $\cos x$ quand $x \geq 0$?

- A. $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2}$
- B. $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ (**bonne réponse**)
- C. $\cos x \geq x$
- D. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$

Justification : On intègre l'inégalité $\sin x \leq x$ (elle-même intégrée depuis $\cos \leq 1$) pour obtenir cette minoration de $\cos x$.