

Fiche 1 : valeurs, formules, équations et inéquations

Huit exercices pour maîtriser toute la trigonométrie du programme :

- conversions et valeurs remarquables ;
- formules d'angles associés ;
- relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$;
- formules de duplication et d'addition ;
- équations sur $\mathbb{R}$ et sur un intervalle ;
- équations avec changement de variable ;
- inéquations et vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- formule citée ;
- solution générale avec $k \in \mathbb{Z}$;
- sélection des solutions de l'intervalle ;
- vérification.

Le modèle de rédaction d'une équation trigonométrique

« Comme $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ s'écrit $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$. Donc $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$, les solutions sont $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$. »

- $\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$
- $\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$
- Sur un intervalle : donne des valeurs entières à k et garde celles qui sont dans l'intervalle.

Les pièges classiques

- Oublier $+2k\pi$ ou la **deuxième famille** de solutions.
- Calculatrice en **degrés** au lieu de radians.
- Confondre $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.
- Garder $X = \cos x$ avec $|X| > 1$.

Si ta calculatrice donne $\cos(\pi) = 0,998$, ne cherche pas l'erreur dans la trigonométrie : elle est en degrés.

Exercice 1 (★) : conversions et valeurs remarquables

1. Convertir en radians : 45° , 120° , 210° . Convertir en degrés : $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

2. Donner la valeur exacte de :

$$\cos \frac{5\pi}{6}, \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right), \cos \frac{7\pi}{3}, \sin \frac{11\pi}{6}, \cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right), \sin \frac{3\pi}{4}.$$

Exercice 2 (★★) : simplifier avec les angles associés

Simplifier, pour tout réel x :

$$A(x) = \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x + \pi)$$

$$B(x) = \sin(\pi - x) - \sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$C(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi)$$

Exercice 3 (★★) : la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$

1. Sachant que $\sin x = \frac{3}{5}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, calculer $\cos x$.

2. Sachant que $\cos x = \frac{1}{4}$ et $x \in [-\pi; 0]$, calculer $\sin x$.

Exercice 4 (★★) : duplication et addition

1. Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$ en utilisant :

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

2. Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ en écrivant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 5 (★★) : équations sur $\mathbb{R}$ **Résoudre dans $\mathbb{R}$:**

1. $\cos x = \frac{1}{2}$

2. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\cos x = 0$

4. $\cos(2x) = \cos x$

Exercice 6 (★★) : équations sur un intervalle

1. Résoudre $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0; 2\pi]$.

2. Résoudre $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ sur $[0; 2\pi]$.

3. Résoudre $\cos x + \sin x = 1$ sur $] -\pi; \pi]$.

Exercice 7 (★★★) : inéquations

1. Résoudre $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $] -\pi; \pi]$.

2. Résoudre $\sin x < -\frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$.

3. Résoudre $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \leq 0$ sur $] -\pi; \pi]$.

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. Pour tout réel x , $\cos(2x) = 2\cos x$.

2. Pour tout réel x , $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

3. Pour tout réel x , $\cos^2 x \leq 1$.

4. Pour tout réel x , $\cos(x^2) = \cos^2 x$.

5. L'équation $\cos x = 2$ n'a pas de solution.

6. Si $\sin x = \sin y$, alors $x = y$.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **valeurs exactes** et des formules d'angles associés (exercices 1, 2).
- Une **équation ou inéquation** trigonométrique sur un intervalle, avec ou sans changement de variable (exercices 5, 6, 7).
- Une **formule de duplication ou d'addition** pour calculer une valeur exacte (exercice 4).
- Un **vrai/faux** sur les propriétés de **cos** et **sin** (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Que vaut $\cos \frac{\pi}{3}$?

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 B. $\frac{1}{2}$
 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 D. 1

2. Que vaut $\sin \frac{2\pi}{3}$?

- A. $\frac{1}{2}$
 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
 D. $-\frac{1}{2}$

3. Quelles sont les solutions de $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $[0 ; 2\pi]$?

- A. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$
 B. $\frac{\pi}{3}$ seulement
 C. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$
 D. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$

4. Quelles sont les solutions de $\sin x = \frac{1}{2}$ sur $[0 ; 2\pi]$?

- A. $\frac{\pi}{6}$ seulement
 B. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$
 C. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$
 D. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$

5. Quelle égalité est vraie pour tout réel x ?
- A. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
 - B. $\cos x + \sin x = 1$
 - C. $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$
 - D. $\cos x \sin x = 1$
6. Dans l'exercice 1, quelle est la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{3}$?
- A. 1
 - B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - C. $-\frac{1}{2}$
 - D. $\frac{1}{2}$
7. Dans l'exercice 2, comment se simplifie $A(x) = \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x + \pi)$?
- A. $-\cos x$
 - B. $\cos x$
 - C. $-\sin x$
 - D. $3 \cos x$
8. Dans l'exercice 3, sachant $\sin x = \frac{3}{5}$ avec $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, que vaut $\cos x$?
- A. $\frac{4}{5}$
 - B. $-\frac{4}{5}$
 - C. $\frac{3}{5}$
 - D. $-\frac{3}{5}$
9. Dans l'exercice 5, quel est l'ensemble solution de $\cos(2x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$?
- A. $\emptyset$
 - B. $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
 - C. $\left\{\frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
 - D. $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
10. Dans l'exercice 6, quel est l'ensemble solution de $\cos x + \sin x = 1$ sur $] -\pi; \pi]$?
- A. $\{0\}$
 - B. $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$
 - C. $\left\{0; \frac{\pi}{2}\right\}$
 - D. $\{0; \pi\}$