

Fiche 1 : valeurs, formules, équations et inéquations

Huit exercices pour maîtriser toute la trigonométrie du programme :

- conversions et valeurs remarquables ;
- formules d'angles associés ;
- relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$;
- formules de duplication et d'addition ;
- équations sur $\mathbb{R}$ et sur un intervalle ;
- équations avec changement de variable ;
- inéquations et vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- formule citée ;
- solution générale avec $k \in \mathbb{Z}$;
- sélection des solutions de l'intervalle ;
- vérification.

Le modèle de rédaction d'une équation trigonométrique

« Comme $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ s'écrit $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$. Donc $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$, les solutions sont $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$. »

- $\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$
- $\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$
- Sur un intervalle : donne des valeurs entières à k et garde celles qui sont dans l'intervalle.

Les pièges classiques

- Oublier $+2k\pi$ ou la **deuxième famille** de solutions.
- Calculatrice en **degrés** au lieu de radians.
- Confondre $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.
- Garder $X = \cos x$ avec $|X| > 1$.

Si ta calculatrice donne $\cos(\pi) = 0,998$, ne cherche pas l'erreur dans la trigonométrie : elle est en degrés.

Exercice 1 (★) : conversions et valeurs remarquables

1. Convertir en radians : 45° , 120° , 210° . Convertir en degrés : $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

2. Donner la valeur exacte de :

$$\cos \frac{5\pi}{6}, \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right), \cos \frac{7\pi}{3}, \sin \frac{11\pi}{6}, \cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right), \sin \frac{3\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 1

Question 1

$$x^\circ = x \times \frac{\pi}{180} \text{ radians.}$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$$210^\circ = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{Inversement, } x \text{ rad} = x \times \frac{180}{\pi} \text{ degrés.}$$

$$\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$$

$$\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

Question 2

On se ramène aux valeurs remarquables par les formules d'angles associés et la périodicité.

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} \text{ (le sinus est impair)}$$

$$\sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{7\pi}{3} = \cos \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos \frac{\pi}{3} \text{ (périodicité)}$$

$$\cos \frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \text{ (le cosinus est pair)} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 2 (★★) : simplifier avec les angles associés

Simplifier, pour tout réel x :

$$A(x) = \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x + \pi)$$

$$B(x) = \sin(\pi - x) - \sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$C(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi)$$

Correction de l'exercice 2

$$A(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$A(x) = -\cos x + \cos x - \cos x$$

$$A(x) = -\cos x$$

$$B(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \text{ donc } -\sin(-x) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$B(x) = \sin x + \sin x + \sin x$$

$$B(x) = 3\sin x$$

$$C(x)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$\sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -\sin x$$

$$C(x) = -\sin x - \sin x$$

$$C(x) = -2 \sin x$$

Exercice 3 (★★) : la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$

1. Sachant que $\sin x = \frac{3}{5}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, calculer $\cos x$.
2. Sachant que $\cos x = \frac{1}{4}$ et $x \in [-\pi; 0]$, calculer $\sin x$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Donc $\cos x = \frac{4}{5}$ ou $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Or $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: le cosinus est négatif sur cet intervalle.

$$\cos x = -\frac{4}{5}$$

Question 2

$\sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$. Donc $\sin x = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Or $x \in [-\pi; 0]$: le sinus est négatif ou nul sur cet intervalle.

$$\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Exercice 4 (★★) : duplication et addition

1. Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$ en utilisant :

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$$

2. Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ en écrivant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 4

Question 1

Avec $x = \frac{\pi}{8}$: $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$. Donc $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$.

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos \frac{\pi}{8} > 0$.

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

De même, $\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8}$. Donc $\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$.

Comme $\sin \frac{\pi}{8} > 0$:

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Question 2

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Exercice 5 (★★) : équations sur $\mathbb{R}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\cos x = \frac{1}{2}$

2. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\cos x = 0$

4. $\cos(2x) = \cos x$

Correction de l'exercice 5

Dans toutes les réponses, k désigne un entier relatif.

Question 1

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$S = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Question 2

$$\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \iff x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4} \right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi.$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Question 3

$\cos x = \cos \frac{\pi}{2} \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Ces deux familles se regroupent :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Question 4

$$\cos(2x) = \cos x \iff 2x = x + 2k\pi \text{ ou } 2x = -x + 2k\pi \iff x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{3}.$$

La première famille est contenue dans la seconde (k multiple de 3).

$$S = \left\{ \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 6 (★★) : équations sur un intervalle

1. Résoudre $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0; 2\pi]$.
2. Résoudre $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ sur $[0; 2\pi]$.
3. Résoudre $\cos x + \sin x = 1$ sur $] -\pi; \pi]$.

Correction de l'exercice 6

Question 1

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi. \text{ Sur } [0; 2\pi]$$

($k = 0$) :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$$

Question 2

On pose $X = \sin x$, avec $-1 \leq X \leq 1$. L'équation devient $2X^2 - X - 1 = 0$. $(2X + 1)(X - 1) = 0$. Donc $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = 1$, deux valeurs comprises entre -1 et 1 .

$$\text{Si } \sin x = 1 : x = \frac{\pi}{2} \text{ sur } [0; 2\pi].$$

$$\text{Si } \sin x = -\frac{1}{2} : \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \text{ donc } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi. \text{ Sur } [0; 2\pi] : x = \frac{11\pi}{6} \text{ (} k = 1 \text{ pour la première famille) ou } x = \frac{7\pi}{6}.$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$$

Question 3

Par la formule d'addition :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$$

Donc $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

L'équation équivaut à $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$. Soit $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. C'est-à-dire $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = 2k\pi$.

Sur $] -\pi ; \pi]$ ($k = 0$) :

$$S = \left\{0; \frac{\pi}{2}\right\}$$

Vérification : $\cos 0 + \sin 0 = 1$ et $\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Exercice 7 (★★★) : inéquations

1. Résoudre $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $] -\pi ; \pi]$.
2. Résoudre $\sin x < -\frac{1}{2}$ sur $[0 ; 2\pi]$.
3. Résoudre $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 \leq 0$ sur $] -\pi ; \pi]$.

Correction de l'exercice 7

Question 1

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $] -\pi ; \pi]$ pour $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = -\frac{\pi}{4}$. Sur le cercle trigonométrique, les points dont l'abscisse (le cosinus) est supérieure ou égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ forment l'arc entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

$$S = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$$

Question 2

$\sin x = -\frac{1}{2}$ sur $[0 ; 2\pi]$ pour $x = \frac{7\pi}{6}$ et $x = \frac{11\pi}{6}$. Les points dont l'ordonnée (le sinus) est strictement inférieure à $-\frac{1}{2}$ forment l'arc ouvert entre $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

$$S = \left] \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right[$$

Question 3

On pose $X = \cos x$. L'inéquation devient $2X^2 - 3X + 1 \leq 0$. $(2X - 1)(X - 1) \leq 0$. C'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq X \leq 1$.

Comme $\cos x \leq 1$ pour tout x , l'inéquation équivaut à $\cos x \geq \frac{1}{2}$. Sur $] -\pi ; \pi]$, $\cos x = \frac{1}{2}$ pour $x = \pm \frac{\pi}{3}$.

$$S = \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} \right]$$

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Pour tout réel x , $\cos(2x) = 2 \cos x$.
2. Pour tout réel x , $\sin(x + \pi) = -\sin x$.
3. Pour tout réel x , $\cos^2 x \leq 1$.
4. Pour tout réel x , $\cos(x^2) = \cos^2 x$.
5. L'équation $\cos x = 2$ n'a pas de solution.
6. Si $\sin x = \sin y$, alors $x = y$.

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

Pour $x = 0$: $\cos 0 = 1$ et $2 \cos 0 = 2$. En général $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$.

Faux.

Affirmation 2

C'est la formule $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

Vrai.

Affirmation 3

$-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $0 \leq \cos^2 x \leq 1$.

Vrai.

Affirmation 4

Pour $x = \pi$: $\cos(\pi^2) \approx \cos(9,87) \approx -0,90$, alors que $\cos^2 \pi = 1$.

Faux.

Affirmation 5

$\cos x \leq 1 < 2$ pour tout x .

Vrai.

Affirmation 6

Contre-exemple : $x = 0$ et $y = \pi$ donnent $\sin x = \sin y = 0$, avec $x \neq y$. La fonction sinus n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ (elle est périodique).

Faux.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **valeurs exactes** et des formules d'angles associés (exercices 1, 2).
- Une **équation ou inéquation** trigonométrique sur un intervalle, avec ou sans changement de variable (exercices 5, 6, 7).
- Une **formule de duplication ou d'addition** pour calculer une valeur exacte (exercice 4).
- Un **vrai/faux** sur les propriétés de $\cos$ et $\sin$ (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Que vaut $\cos \frac{\pi}{3}$?

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- B. $\frac{1}{2}$ (bonne réponse)
- C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. 1

Justification : Valeur remarquable : $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Que vaut $\sin \frac{2\pi}{3}$?

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (bonne réponse)
- C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. $-\frac{1}{2}$

Justification : $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Quelles sont les solutions de $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$?

- A. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$
- B. $\frac{\pi}{3}$ seulement
- C. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$
- D. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$ (bonne réponse)

Justification : $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \iff x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$: sur $[0; 2\pi]$, $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

4. Quelles sont les solutions de $\sin x = \frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$?

- A. $\frac{\pi}{6}$ seulement
- B. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$
- C. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ (bonne réponse)
- D. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$

Justification : $\sin x = \sin \frac{\pi}{6} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

5. Quelle égalité est vraie pour tout réel x ?

- A. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (bonne réponse)
- B. $\cos x + \sin x = 1$
- C. $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$
- D. $\cos x \sin x = 1$

Justification : C'est la relation fondamentale de la trigonométrie.

6. Dans l'exercice 1, quelle est la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{3}$?

- A. 1
- B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- C. $-\frac{1}{2}$
- D. $\frac{1}{2}$ (bonne réponse)

Justification : $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$, donc $\cos \frac{7\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

7. Dans l'exercice 2, comment se simplifie $A(x) = \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x + \pi)$?

- A. $-\cos x$ (bonne réponse)
- B. $\cos x$
- C. $-\sin x$
- D. $3\cos x$

Justification : $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$: la somme vaut $-\cos x$.

8. Dans l'exercice 3, sachant $\sin x = \frac{3}{5}$ avec $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, que vaut $\cos x$?

- A. $\frac{4}{5}$
- B. $-\frac{4}{5}$ (bonne réponse)
- C. $\frac{3}{5}$
- D. $-\frac{3}{5}$

Justification : $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, et $\cos x \leq 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, donc $\cos x = -\frac{4}{5}$.

9. Dans l'exercice 5, quel est l'ensemble solution de $\cos(2x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$?

- A. $\emptyset$
- B. $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- C. $\left\{\frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ (bonne réponse)
- D. $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Justification : $\cos(2x) = \cos x \iff 2x = \pm x + 2k\pi$, ce qui donne $x = 2k\pi$ ou $x = \frac{2k\pi}{3}$: au final $x = \frac{2k\pi}{3}$ regroupe toutes les solutions.

10. Dans l'exercice 6, quel est l'ensemble solution de $\cos x + \sin x = 1$ sur $] -\pi; \pi]$?

- A. $\{0\}$
- B. $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$
- C. $\left\{0; \frac{\pi}{2}\right\}$ (bonne réponse)
- D. $\{0; \pi\}$

Justification : En écrivant $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, on trouve les solutions $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ sur cet intervalle.