

Contrôle : chapitre 6, Sinus et cosinus

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Valeurs exactes, équation et inéquation

1. Donner la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{6}$ et de $\sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right)$. (1 point)
2. Soit x un réel de $[0; \pi]$ tel que $\cos x = \frac{3}{5}$. Calculer $\sin x$, puis $\cos(\pi - x)$ et $\sin(\pi + x)$. (1,5 points)
3. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. (2 points)
4. En déduire l'ensemble des solutions dans $[0; 2\pi]$ de l'inéquation $2 \cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0$. (1,5 points)

Exercice 2 (7,5 points) : Étude d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x (1 + \cos x)$.

1. Montrer que f est 2π -périodique et impaire. Quel intervalle d'étude suffit-il de retenir ? (1 point)
2. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$. (1,5 points)
3. Étudier le signe de f' sur $[0; \pi]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$. (2 points)
4. Justifier que, pour tout réel x , $-\frac{3\sqrt{3}}{4} \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$. (1 point)
5. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $[0; \pi]$. (2 points)

Exercice 3 (2,5 points) : La hauteur d'eau dans un port

Dans un port, la hauteur d'eau, en mètres, à l'instant t (en heures écoulées depuis une pleine mer, avec $t \in [0; 12]$) est modélisée par $H(t) = 4 + 1,5 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$.

1. Déterminer les hauteurs d'eau minimale et maximale prévues par ce modèle, ainsi que les instants de $[0; 12]$ où elles sont atteintes. (1 point)
2. Un navire ne peut entrer dans le port que si la hauteur d'eau est supérieure ou égale à 4,75 m. Déterminer les instants de $[0; 12]$ où il peut entrer, puis la durée totale correspondante. (1,5 points)

Exercice 4 (4 points) : Limites et suite

Pour la question 3, on dispose du script Python suivant, dans lequel la condition de la boucle a été effacée.

```
from math import sin

def seuil(eps):
    n = 1
    while ..... :
        n = n + 1
    return n
```

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{2x + 1}$. (1,5 points)
2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = n \sin \frac{1}{n}$. Montrer que $v_n = \frac{\sin X_n}{X_n}$ avec $X_n = \frac{1}{n}$, puis déterminer la limite de (v_n) en interprétant $\frac{\sin X}{X}$ comme un taux de variation de la fonction sinus. (1,5 points)
3. On souhaite déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $|v_n - 1| < \varepsilon$. Compléter la condition de la boucle dans le script Python de l'énoncé, puis donner la valeur renvoyée par `seuil(0.001)` (la calculatrice est autorisée). (1 point)