

Contrôle : chapitre 6, Sinus et cosinus

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Valeurs exactes, équation et inéquation

1. Donner la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{6}$ et de $\sin \left(-\frac{3\pi}{4}\right)$. (1 point)
2. Soit x un réel de $[0; \pi]$ tel que $\cos x = \frac{3}{5}$. Calculer $\sin x$, puis $\cos(\pi - x)$ et $\sin(\pi + x)$. (1,5 points)
3. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. (2 points)
4. En déduire l'ensemble des solutions dans $[0; 2\pi]$ de l'inéquation $2 \cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0$. (1,5 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1 point)

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6}, \text{ donc } \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Le sinus est impair : } \sin \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin \frac{3\pi}{4} = -\sin \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4}.$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Barème : 0,5 point pour $\cos \frac{7\pi}{6}$ avec la formule d'angle associé citée ; 0,5 point pour $\sin \left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ avec imparité et angle associé.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1,5 points)

Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, soit $\sin x = \frac{4}{5}$ ou $\sin x = -\frac{4}{5}$. Comme $x \in [0; \pi]$, $\sin x \geq 0$: $\sin x = \frac{4}{5}$.

Sur le cercle trigonométrique, les points images de x et de $\pi - x$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : $\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{3}{5}$.

Les points images de x et de $\pi + x$ sont symétriques par rapport à l'origine : $\sin(\pi + x) = -\sin x = -\frac{4}{5}$.

$$\sin x = \frac{4}{5}, \cos(\pi - x) = -\frac{3}{5} \text{ et } \sin(\pi + x) = -\frac{4}{5}.$$

Barème : 0,5 point pour $\sin x = \frac{4}{5}$ avec le choix du signe justifié par $x \in [0; \pi]$; 0,5 point pour $\cos(\pi - x)$ avec l'angle associé justifié ; 0,5 point pour $\sin(\pi + x)$ avec l'angle associé justifié.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (2 points)

On pose $X = \cos x$, avec $-1 \leq X \leq 1$. L'équation devient $2X^2 + X - 1 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0$, donc $X_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$ et $X_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$. Les deux valeurs appartiennent à $[-1; 1]$.

Cas $\cos x = \frac{1}{2}$. Comme $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, l'équation s'écrit $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$, soit $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0; 2\pi]$, on retient $x = \frac{\pi}{3}$ (pour $k = 0$) et $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ (pour $k = 1$).

Cas $\cos x = -1$. Comme $\cos \pi = -1$, on a $x = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et seul $x = \pi$ appartient à $[0; 2\pi]$.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

Barème : 1 point pour le changement de variable et les deux racines -1 et $\frac{1}{2}$; 0,5 point pour les solutions de $\cos x = \frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi]$ (deux familles) ; 0,5 point pour la solution de $\cos x = -1$ et la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (1,5 points)

D'après la question précédente, $2X^2 + X - 1 = 2 \left(X - \frac{1}{2} \right) (X + 1) = (2X - 1)(X + 1)$.

Donc $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$.

Pour tout réel x , $\cos x + 1 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\cos x = -1$, c'est-à-dire $x = \pi$ dans $[0; 2\pi]$. Le signe du produit est donc celui de $2 \cos x - 1$, sauf en $x = \pi$ où le produit est nul.

$2 \cos x - 1 \leq 0 \iff \cos x \leq \frac{1}{2}$. Sur le cercle trigonométrique, les points d'abscisse inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$ correspondent, dans $[0; 2\pi]$, à $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$. Cet intervalle contient π .

$$S = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right].$$

Barème : 0,5 point pour la factorisation ; 0,5 point pour le signe de $\cos x + 1$ (y compris le cas d'annulation) ; 0,5 point pour la résolution de $\cos x \leq \frac{1}{2}$ et la conclusion.

Exercice 2 (7,5 points) : Étude d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x (1 + \cos x)$.

1. Montrer que f est 2π -périodique et impaire. Quel intervalle d'étude suffit-il de retenir ? (1 point)
2. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$. (1,5 points)
3. Étudier le signe de f' sur $[0; \pi]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$. (2 points)
4. Justifier que, pour tout réel x , $-\frac{3\sqrt{3}}{4} \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$. (1 point)
5. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $[0; \pi]$. (2 points)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (1 point)

Pour tout réel x : $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) (1 + \cos(x + 2\pi)) = \sin x (1 + \cos x) = f(x)$, donc f est 2π -périodique.

$f(-x) = \sin(-x) (1 + \cos(-x)) = -\sin x (1 + \cos x) = -f(x)$, donc f est impaire.

La périodicité permet d'étudier f sur $[-\pi; \pi]$, et l'imparité (symétrie de la courbe par rapport à l'origine) sur $[0; \pi]$.

Il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$.

Barème : 0,5 point pour la périodicité justifiée par le calcul ; 0,5 point pour l'imparité justifiée et l'intervalle $[0; \pi]$.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1,5 points)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, produit de $\sin x$ et de $1 + \cos x$, et $f'(x) = \cos x (1 + \cos x) + \sin x \times (-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$.

Avec $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$: $f'(x) = \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.

D'après l'exercice 1, $2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$ (on peut aussi le vérifier par développement : $(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1$).

$f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

Barème : 0,5 point pour la dérivée du produit $\cos x (1 + \cos x) - \sin^2 x$; 0,5 point pour l'utilisation de $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; 0,5 point pour la factorisation.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (2 points)

Sur $[0; \pi]$, $\cos x + 1 \geq 0$ et ne s'annule qu'en $x = \pi$.

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0; \pi]$ et $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc $2\cos x - 1 > 0$ pour $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$ et $2\cos x - 1 < 0$ pour $x \in [\frac{\pi}{3}; \pi]$.

Ainsi $f'(x) > 0$ sur $[0; \frac{\pi}{3}]$ et $f'(x) < 0$ sur $[\frac{\pi}{3}; \pi]$; de plus $f'(\frac{\pi}{3}) = f'(\pi) = 0$.

Valeurs : $f(0) = 0$, $f(\pi) = \sin \pi (1 + \cos \pi) = 0$ et $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		+	0	-	
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

Barème : 1 point pour le signe de f' justifié sur $[0; \pi]$; 1 point pour le tableau avec les trois valeurs exactes.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1 point)

D'après le tableau, $f(0) = f(\pi) = 0$, f croît puis décroît : sur $[0; \pi]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Par imparité, pour $x \in [-\pi; 0]$, $f(x) = -f(-x)$ avec $-x \in [0; \pi]$, donc $-\frac{3\sqrt{3}}{4} \leq f(x) \leq 0$.

L'encadrement est vrai sur $[-\pi; \pi]$.

Tout réel est congruent modulo 2π à un réel de $[-\pi; \pi]$ et f est 2π -périodique :
l'encadrement est vrai sur $\mathbb{R}$.

Barème : 0,5 point pour l'encadrement sur $[0; \pi]$ lu dans le tableau ; 0,5 point pour l'extension à $\mathbb{R}$ par imparité et périodicité.

Correction de l'exercice 2, question 5

Question 5 (2 points)

On a $\frac{3\sqrt{3}}{4} > 1$ car $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{27}{16} > 1$.

Sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$: f est continue (car dérivable) et strictement croissante, avec $f(0) = 0 < 1 < \frac{3\sqrt{3}}{4} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans cet intervalle, et $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$.

Sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$: f est continue et strictement décroissante, avec $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 1 > 0 = f(\pi)$.

Le même corollaire donne une unique solution β dans cet intervalle (on constate d'ailleurs que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2}\right) = 1$, donc $\beta = \frac{\pi}{2}$).

Les deux intervalles n'ont en commun que $\frac{\pi}{3}$, qui n'est pas solution : l'équation $f(x) = 1$ a exactement deux solutions dans $[0; \pi]$.

Barème : 0,5 point pour 1 compris entre $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, avec $\frac{3\sqrt{3}}{4} > 1$ justifié ; 0,5 point pour hypothèses (continuité, stricte monotonie) et unicité sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$; 0,5 point pour même raisonnement sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$; 0,5 point pour la conclusion : exactement deux solutions.

Exercice 3 (2,5 points) : La hauteur d'eau dans un port

Dans un port, la hauteur d'eau, en mètres, à l'instant t (en heures écoulées depuis une pleine mer, avec $t \in [0; 12]$) est modélisée par $H(t) = 4 + 1,5 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$.

1. Déterminer les hauteurs d'eau minimale et maximale prévues par ce modèle, ainsi que les instants de $[0; 12]$ où elles sont atteintes. (1 point)

2. Un navire ne peut entrer dans le port que si la hauteur d'eau est supérieure ou égale à 4,75 m. Déterminer les instants de $[0; 12]$ où il peut entrer, puis la durée totale correspondante. (1,5 points)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1 point)

Pour tout t , $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) \leq 1$, donc $2,5 \leq H(t) \leq 5,5$.

$H(t) = 5,5 \iff \cos\frac{\pi t}{6} = 1 \iff \frac{\pi t}{6} \in \{0; 2\pi\}$ dans $[0; 2\pi]$, soit $t = 0$ ou $t = 12$. De même $H(t) = 2,5 \iff \cos\frac{\pi t}{6} = -1 \iff \frac{\pi t}{6} = \pi \iff t = 6$.

Hauteur maximale 5,5 m (en $t = 0$ et $t = 12$), hauteur minimale 2,5 m (en $t = 6$).

Barème : 0,5 point pour l'encadrement de H par 2,5 et 5,5 ; 0,5 point pour les instants correspondants.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1,5 points)

$H(t) \geq 4,75 \iff 1,5 \cos\frac{\pi t}{6} \geq 0,75 \iff \cos\frac{\pi t}{6} \geq \frac{1}{2}$.

On pose $u = \frac{\pi t}{6}$; quand $t \in [0; 12]$, $u \in [0; 2\pi]$. Comme $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\cos u \geq \frac{1}{2} \iff u \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$.

En revenant à $t = \frac{6u}{\pi}$: $t \in [0; 2] \cup [10; 12]$.

Le navire peut entrer pour $t \in [0; 2] \cup [10; 12]$, soit pendant $2 + 2 = 4$ heures au total.

Barème : 0,5 point pour la mise en inéquation $\cos\frac{\pi t}{6} \geq \frac{1}{2}$; 0,5 point pour la résolution avec le bon intervalle pour u ; 0,5 point pour les intervalles en t et la durée totale.

Exercice 4 (4 points) : Limites et suite

Pour la question 3, on dispose du script Python suivant, dans lequel la condition de la boucle a été effacée.

```
from math import sin

def seuil(eps):
    n = 1
    while ..... :
        n = n + 1
    return n
```

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{2x + 1}$. (1,5 points)
2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = n \sin \frac{1}{n}$. Montrer que $v_n = \frac{\sin X_n}{X_n}$ avec $X_n = \frac{1}{n}$, puis déterminer la limite de (v_n) en interprétant $\frac{\sin X}{X}$ comme un taux de variation de la fonction sinus. (1,5 points)
3. On souhaite déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $|v_n - 1| < \varepsilon$. Compléter la condition de la boucle dans le script Python de l'énoncé, puis donner la valeur renvoyée par `seuil(0.001)` (la calculatrice est autorisée). (1 point)

Correction de l'exercice 4, question 1

Question 1 (1,5 points)

Pour $x > 0$: $\frac{x + \cos x}{2x + 1} = \frac{1 + \frac{\cos x}{x}}{2 + \frac{1}{x}}$.

Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\pm \frac{1}{x}\right) = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

Par somme puis quotient (le dénominateur tend vers $2 \neq 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{2x + 1} = \frac{1}{2}.$$

Barème : 0,5 point pour l'encadrement de $\frac{\cos x}{x}$ avec $x > 0$; 0,5 point pour le théorème des gendarmes ; 0,5 point pour la limite du quotient.

Correction de l'exercice 4, question 2

Question 2 (1,5 points)

Pour $n \geq 1$, $X_n = \frac{1}{n} \neq 0$ et $\frac{\sin X_n}{X_n} = n \sin \frac{1}{n} = v_n$.

Pour $X \neq 0$, $\frac{\sin X}{X} = \frac{\sin X - \sin 0}{X - 0}$ est le taux de variation de la fonction sinus entre 0 et X .

La fonction sinus est dérivable en 0 et $\sin'(0) = \cos 0 = 1$, donc $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$.

Comme $X_n \rightarrow 0$ avec $X_n \neq 0$, par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$$

Barème : 0,5 point pour $v_n = \frac{\sin X_n}{X_n}$ avec $X_n = \frac{1}{n}$; 0,5 point pour le taux de variation de sinus en 0 et $\sin'(0) = \cos 0 = 1$; 0,5 point pour la limite par composition.

Correction de l'exercice 4, question 3

Question 3 (1 point)

Script complété :

```
from math import sin

def seuil(eps):
    n = 1
    while abs(n * sin(1/n) - 1) >= eps:
        n = n + 1
    return n
```

La boucle continue tant que l'écart $|v_n - 1|$ est supérieur ou égal à ε et s'arrête au premier entier n qui convient. À la calculatrice (en radians) : $v_{12} \approx 0,99884$ donc $|v_{12} - 1| \approx 0,00116 \geq 0,001$, et $v_{13} \approx 0,99901$ donc $|v_{13} - 1| \approx 0,00099 < 0,001$; un tableau de valeurs montre que l'écart est supérieur ou égal à 0,001 pour $n \leq 12$.

`seuil(0.001)` renvoie 13.

Barème : 0,5 point pour la condition de boucle `abs(...)` $\geq$ `eps` ; 0,5 point pour la valeur renvoyée.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6
Exercice 2	7,5
Exercice 3	2,5
Exercice 4	4
Total	20