

Guide de rédaction : fonction logarithme

Ce guide complète le Guide de rédaction général.

Il rassemble, pour le chapitre Fonction logarithme, les **quatorze situations qui reviennent au bac** et, pour chacune, la rédaction modèle.

Avec **ln**, la rédaction commence toujours par l'ensemble de définition : c'est le réflexe qui distingue les copies excellentes des autres.

Le principe du chapitre

Avec le logarithme, un correcteur regarde surtout **cinq choses** :

- l'**ensemble de définition** écrit en premier ;
- les **équivalences justifiées** ($\ln A = \ln B \iff A = B$ pour $A, B > 0$) ;
- la **vérification** des solutions ;
- les **croissances comparées nommées** ;
- le **sens des inégalités** (retourné quand on divise par un logarithme négatif).

1. Les quatorze situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : l'ensemble de définition.

« $f(x)$ existe si et seulement si $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Un tableau de signes donne $-1 < x < 1$. Donc l'ensemble de définition est $D =]-1; 1[$. »

Pour une somme : « $\ln x + \ln(x-2)$ existe si et seulement si $x > 0$ et $x-2 > 0$, soit $x > 2$. »

Situation 2 : transformer avec les propriétés.

« Pour $a, b > 0$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. Donc $\ln 72 = \ln(2^3 \times 3^2) = 3\ln 2 + 2\ln 3$. »

Précise que les nombres sont **strictement positifs** : les formules ne valent pas pour un réel négatif.

Situation 3 : résoudre une équation avec $\ln$ ($\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$).

« Ensemble de définition : $x > 0$ et $x-1 > 0$, soit $x > 1$.

Résolution : pour $x > 1$, $\ln x + \ln(x-1) = \ln(x(x-1))$. Donc l'équation équivaut à $x(x-1) = 6$, soit $x^2 - x - 6 = 0$. $(x-3)(x+2) = 0$, donc $x = 3$ ou $x = -2$.

Vérification : comme $x > 1$, -2 est exclu.

Conclusion : $S = \{3\}$. »

Situation 4 : résoudre une inéquation avec $\ln$ ($\ln(2x + 1) < 1$).

« Ensemble de définition : $2x + 1 > 0$, soit $x > -\frac{1}{2}$.

Comme $\ln$ est strictement croissante et $\ln e = 1$: $\ln(2x + 1) < 1 \iff 2x + 1 < e \iff x < \frac{e-1}{2}$.

Conclusion : $S = \left] -\frac{1}{2}; \frac{e-1}{2} \right[$. »

Situation 5 : une équation exponentielle avec changement de variable.

« On pose $X = e^x$, avec $X > 0$. L'équation $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ devient $X^2 - 3X + 2 = 0$. $(X - 1)(X - 2) = 0$, donc $X = 1$ ou $X = 2$. Ces deux valeurs sont strictement positives. Donc $e^x = 1$ ou $e^x = 2$, soit $x = 0$ ou $x = \ln 2$. »

Dis explicitement que $X > 0$, et écarte les solutions négatives.

Situation 6 : un seuil avec $\ln$ ($0,85^n < 0,1$).

« Comme $\ln$ est strictement croissante, $0,85^n < 0,1 \iff n \ln 0,85 < \ln 0,1$. Comme $0,85 < 1$, $\ln 0,85 < 0$: on divise en **retournant l'inégalité**. $n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,85} \approx 14,17$. Le plus petit entier est $n = 15$. »

Pour $q > 1$, $\ln q > 0$ et on ne retourne pas l'inégalité. Donne toujours l'**entier**, pas la valeur décimale.

Situation 7 : dériver $\ln u$.

« Pour $x > -\frac{2}{3}$, $3x + 2 > 0$: f est dérivable sur $\left] -\frac{2}{3}; +\infty \right[$ comme composée de $x \mapsto 3x + 2$ (strictement positive) et de $\ln$. Avec $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$: $f'(x) = \frac{3}{3x + 2}$. »

Situation 8 : une limite avec croissances comparées.

« Pour $x > 0$, $x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$. Par croissances comparées, $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, donc $1 - \frac{\ln x}{x} \rightarrow 1$.

Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty$. »

« Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$. »

Nomme toujours le résultat : « par croissances comparées ».

Situation 9 : une limite par nombre dérivé.

« $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$ est le nombre dérivé de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0, qui vaut $\frac{1}{1+0} = 1$. »

Pour $\frac{\ln x}{x-1}$ en 1 : « c'est le taux d'accroissement de $\ln$ en 1, qui tend vers $\ln'(1) = 1$. »

Situation 10 : l'étude d'une fonction avec $\ln$.

1. **Domaine** : « f est définie sur $]0; +\infty[$. »
2. **Limites** : avec croissances comparées, et le comportement de $\ln x$ en 0^+ .
3. **Dérivée** : « f est dérivable comme ... Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dots$. »
4. **Signe** : facteur par facteur ($x > 0$, $x^2 > 0$, $\ln x$ du signe de $x - 1$).
5. **Tableau** : limites, valeurs ($f(1)$, $f(e)$, $f\left(\frac{1}{e}\right)$...).
6. **Convexité, tangente, équation** selon les questions.

Situation 11 : utiliser ou démontrer $\ln x \leq x - 1$.

« Soit $f(x) = x - \ln x$ sur $]0; +\infty[$. $f'(x) = \frac{x-1}{x}$, du signe de $x - 1$. Donc f admet un minimum en 1, égal à $f(1) = 1$. Ainsi $x - \ln x \geq 1$, soit $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$. »

Ou : « $\ln$ est concave, sa courbe est en dessous de sa tangente en 1, d'équation $y = x - 1$. »

Situation 12 : suites avec $\ln$.

Monotonie : « Comme $\ln x \leq x - 1$, avec $x = 1 + u_n$: $\ln(1 + u_n) \leq u_n$, donc $u_{n+1} \leq u_n$. »

Limite de $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$: « $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}$ et $n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = a \times \frac{\ln(1+h)}{h}$ avec $h = \frac{a}{n} \rightarrow 0$.
Donc $n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \rightarrow a$. Par composition, la limite est e^a . »

Situation 13 : un problème de modélisation.

« $N(t+T) = N(t) \times e^{0,3T}$. Donc $N(t+T) = 2N(t) \iff e^{0,3T} = 2 \iff T = \frac{\ln 2}{0,3} \approx 2,31$ heures, quel que soit t .

Conclusion : le temps de doublement est d'environ 2,31 heures. »

Une conclusion **en contexte, avec l'unité**, est obligatoire.

Situation 14 : vrai/faux et contre-exemple.

« L'affirmation est **fausse**. Contre-exemple : $a = b = 1$. $\ln(a+b) = \ln 2 \neq 0 = \ln a + \ln b$. »

2. Avant / après sur le logarithme

a) Une équation.

« $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6$ donc $x(x - 1) = 6$ donc $x = 3$ ou $x = -2$. »

« Pour $x > 1$, l'équation équivaut à $x(x - 1) = 6$, donc $x = 3$ ou $x = -2$. Comme $x > 1$, $S = \{3\}$. »

Ce qui manque à la première : l'ensemble de définition et l'élimination de -2 .

b) Un seuil.

« $0,85^n < 0,1$ donc $n < \frac{\ln 0,1}{\ln 0,85}$. »

« $n \ln 0,85 < \ln 0,1$, et $\ln 0,85 < 0$, donc $n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,85} \approx 14,17$, soit $n = 15$. »

c) Une limite.

« $x \ln x = 0 \times (-\infty) = 0$. »

« Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$. »

d) Une propriété.

« $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$. »

« $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. Il n'existe pas de formule pour $\ln(a + b)$. »

3. Les erreurs de rédaction propres à ce chapitre

- Oublier l'**ensemble de définition**, ou garder une solution qui n'y appartient pas.
- Écrire $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$, ou $\frac{\ln x}{\ln y} = \ln \frac{x}{y}$.
- Oublier de **retourner l'inégalité** en divisant par un logarithme négatif.
- Poser $X = e^x$ sans dire que $X > 0$, et garder une solution négative.
- Une limite avec **ln sans citer** les croissances comparées.
- Oublier que $\ln x \rightarrow -\infty$ en 0^+ .
- Dériver $\ln u$ sans vérifier que $u > 0$.
- Un seuil **non entier**, ou un résultat de modélisation sans unité.

4. La check-list du chapitre Fonction logarithme

- J'ai écrit l'**ensemble de définition** avant toute équation ou dérivée.
- Mes équivalences utilisent bien $\ln A = \ln B \iff A = B$ avec $A, B > 0$.
- J'ai **vérifié** que mes solutions appartiennent à l'ensemble de définition.
- Dans un seuil, j'ai regardé le **signe de $\ln q$** avant de diviser.
- Chaque limite avec **ln** cite les **croissances comparées** ou un **nombre dérivé**.
- Mon tableau contient les **limites** et les valeurs remarquables.
- Pour un problème, ma conclusion est **en contexte, avec l'unité**.
- J'ai **vérifié** avec une valeur simple : $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.

Un logarithme sans ensemble de définition, c'est un pilote sans licence : ça roule tant que personne ne contrôle, et le correcteur contrôle.