

Fonction logarithme : le cours

Le logarithme népérien est la fonction **réci-proque de l'exponentielle** : elle « défait » ce que fait e^x .

Elle transforme les produits en sommes et les puissances en produits.

Elle permet de résoudre des équations où l'inconnue est en exposant.

C'est un chapitre très présent au bac :

- études de fonctions ;
- équations ;
- seuils de suites ;
- inégalités.

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Les **propriétés algébriques** (partie 2) et les **croissances comparées** (partie 4) sont à connaître par cœur.
- Avant toute équation avec $\ln$, pense à la **condition d'existence** : c'est le piège numéro un.

1. Définition et propriétés immédiates

Pour tout réel $x > 0$, l'équation $e^y = x$ admet une unique solution y . (L'exponentielle est continue, strictement croissante, de 0 à $+\infty$.) Cette solution s'appelle le **logarithme népérien de x** , noté $\ln x$. La fonction $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$.

Réciprocité :

- pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$;
- pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.

Valeurs : $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.

Signe :

- $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$;
- $\ln x > 0$ si $x > 1$.

Monotonie : $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Donc, pour $a, b > 0$:

- $\ln a = \ln b \iff a = b$;
- $\ln a < \ln b \iff a < b$.

Pièges

- $\ln$ n'est définie **que pour** $x > 0$: $\ln 0$ et $\ln(-3)$ n'existent pas.
- $\ln$ et $\exp$ se compensent, **mais dans un seul ensemble de définition** : $e^{\ln x} = x$ exige $x > 0$.

Le logarithme est un peu susceptible : donne-lui un nombre négatif, et il refuse de répondre.

2. Les propriétés algébriques

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et tout entier n :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Démonstration de $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

On a $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$. Donc $\ln a + \ln b$ est l'unique réel dont l'exponentielle vaut ab . C'est $\ln(ab)$.

Pièges

- $\ln(a + b) \neq \ln a + \ln b$. Aucune formule ne simplifie $\ln(a + b)$.
- $\ln(a \times b)$ est une somme, mais $\ln a \times \ln b$ n'est pas $\ln(a + b)$: ne mélange pas.
- Pour $a < 0$, $\ln(a^2) = 2 \ln |a|$, et **pas** $2 \ln a$ (qui n'existe pas). Les formules exigent $a, b > 0$.

Astuce : pour exprimer un logarithme à partir de $\ln 2$ et $\ln 3$, décompose le nombre en **produit** de puissances de 2 et de 3 :

$$\ln 72 = \ln(2^3 \times 3^2) = 3 \ln 2 + 2 \ln 3$$

3. Dérivée et variations

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Si u est dérivable et **strictement positive** sur I , alors $\ln u$ est dérivable sur I et :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$\ln$ est strictement croissante (car $\frac{1}{x} > 0$) et concave (car $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$).

Exemples.

$$(\ln(3x + 2))' = \frac{3}{3x + 2}$$

$$(\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$(x \ln x)' = \ln x + 1$$

Astuce : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$: « la dérivée du haut sur le bas ». Vérifie toujours que $u > 0$ avant d'écrire $\ln u$.

4. Limites et croissances comparées

Aux bornes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Croissances comparées :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- pour tout entier $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$

Nombres dérivés :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ (nombre dérivé de $\ln$ en 1, qui vaut 1)

Astuces

- Le logarithme croît **plus lentement que toute puissance** de x en $+\infty$. En 0^+ , $x \ln x$ tend vers 0 : la puissance « gagne » contre le logarithme.
- Pour une limite avec $\ln$ en $+\infty$, mets en facteur le terme dominant (x , ou x^n).

Piège : écrire « $x \ln x = 0 \times (-\infty) = 0$ » sans citer les croissances comparées : c'est une forme indéterminée.

5. Convexité et inégalités

La fonction $\ln$ est concave : sa courbe est en dessous de ses tangentes. La tangente en 1 a pour équation $y = x - 1$. Donc $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

En appliquant cette inégalité à $\frac{1}{x}$: $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$. On obtient l'encadrement :

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$$

avec égalité seulement en $x = 1$.

6. Équations et inéquations avec $\ln$

1. **Ensemble de définition** : chaque expression dans un $\ln$ doit être strictement positive.
2. **Transformer** : regrouper avec les propriétés ($\ln a + \ln b = \ln(ab)$). Puis utiliser $\ln A = \ln B \iff A = B$, ou $\ln A = k \iff A = e^k$.
3. **Résoudre** l'équation obtenue.
4. **Vérifier** que les solutions sont dans l'ensemble de définition, et conclure.

Inéquations : comme $\ln$ est strictement croissante :

- $\ln A < \ln B \iff A < B$ (avec $A, B > 0$) ;
- $\ln A < k \iff 0 < A < e^k$.

Le sens de l'inégalité est conservé.

Changement de variable : une équation du second degré en $\ln x$ se pose $X = \ln x$, et en e^x se pose $X = e^x$ (avec $X > 0$).

Piège : résoudre $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6$ en trouvant $x^2 - x - 6 = 0$, donc $x = 3$ ou $x = -2$, et garder les deux. La condition $x > 1$ élimine -2 .

Une solution qui ne respecte pas l'ensemble de définition, c'est un invité qui se présente à une fête où il n'est pas sur la liste.

7. Équations exponentielles et seuils

- $e^x = k$ ($k > 0$) $\iff x = \ln k$. Il n'y a aucune solution si $k \leq 0$.
- Pour un réel $q > 0$: $q^n \geq A \iff n \ln q \geq \ln A$.
- Si $q > 1$, $\ln q > 0$ et on obtient $n \geq \frac{\ln A}{\ln q}$.
- Si $0 < q < 1$, $\ln q < 0$ et l'inégalité change de sens : $n \leq \frac{\ln A}{\ln q}$.

Exemple. Cherchons le plus petit entier n tel que $1,05^n \geq 2$. Comme $\ln 1,05 > 0$:

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2$$

Donc $n = 15$.

Piège : avec $0,9^n < 0,25$, on obtient $n \ln 0,9 < \ln 0,25$. Comme $\ln 0,9 < 0$, on divise en retournant l'inégalité :

$$n > \frac{\ln 0,25}{\ln 0,9} \approx 13,2$$

donc $n = 14$.

8. L'étude d'une fonction avec $\ln$

1. **Domaine** : les expressions dans $\ln$ strictement positives.
2. **Limites aux bornes** avec les croissances comparées.
3. **Dérivée** avec $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, factorisée ; signe justifié.
4. **Tableau de variations** avec limites et valeurs (souvent en 1 ou en e).
5. **Convexité, tangentes, équation** selon les questions.

9. Les 10 pépites du chapitre

1. **Ensemble de définition d'abord**, toujours, avant de toucher à une équation ou à une dérivée.
2. $\ln a = \ln b \iff a = b$: le moyen le plus rapide de transformer une équation.
3. $\ln A = k \iff A = e^k$; $e^x = k \iff x = \ln k$.
4. **Signe de $\ln x$** : négatif avant 1, positif après 1. Utilise-le pour étudier des signes.
5. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$: compare avec la dérivée de e^u , qui est $u'e^u$.
6. **Croissances comparées** : $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$, $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ .
7. Pour $\frac{\ln(1+x)}{x}$ en 0 et $\frac{\ln x}{x-1}$ en 1 : pense au nombre dérivé.
8. $\ln x \leq x - 1$ est l'inégalité la plus utile du chapitre, avec son jumeau $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.
9. **Seuils** : $n \ln q \geq \ln A$, en retournant le sens si $q < 1$.
10. **Vérifie** tes résultats avec une valeur simple : $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln(e^2) = 2$.

Complément du programme : démontrer la dérivée de $\ln$ et une limite

Dérivée du logarithme. Pour $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (on admet que $\ln$ est dérivable).

Démonstration. Pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$. On dérive les deux membres : $(e^{\ln x})' = (\ln x)' e^{\ln x} = (\ln x)' \times x$.

Le membre de droite se dérive en 1 : $(\ln x)' \times x = 1$, donc $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. $\square$

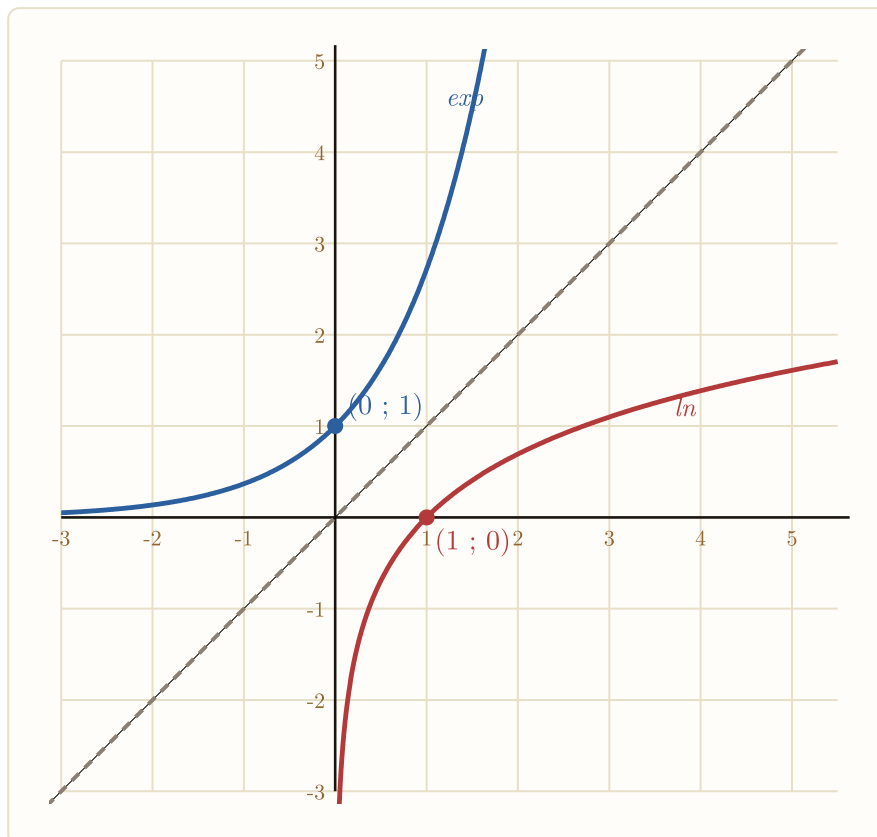
Limite en 0. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.

Démonstration. On pose $X = \frac{1}{x}$, qui tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$. Alors $x \ln x = \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = -\frac{\ln X}{X}$.

Par croissance comparée, $\frac{\ln X}{X} \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow +\infty$. Donc $x \ln x \rightarrow 0$. $\square$

Complément du programme : $\ln$ et $\exp$ sont réciproques

Pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$ et pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$: les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont **réciproques** l'une de l'autre.



Les courbes de $\exp$ et de $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$

Leurs courbes sont **symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$** : le point $(a; b)$ est sur la courbe de **exp** si et seulement si le point $(b; a)$ est sur celle de **ln**.

Exemple. $(0; 1)$ est sur la courbe de **exp**, donc $(1; 0)$ est sur celle de **ln** ($\ln 1 = 0$).

Complément du programme : l'algorithme de Briggs

Briggs calcule $\ln a$ avec des racines carrées successives. Pour h proche de 0, $a^h = e^{h \ln a} \approx 1 + h \ln a$, donc $\ln a \approx \frac{a^h - 1}{h}$.

En prenant $h = \frac{1}{2^{10}}$ (dix racines carrées de a), on obtient :

```
a = 2
n = 2 ** 10
print(n * (a ** (1 / n) - 1))  # affiche environ 0.69338
```

La valeur exacte est $\ln 2 \approx 0,69315$: l'approximation a trois décimales correctes.

10. Ce qui peut tomber au bac

- Des **propriétés algébriques**, équations et inéquations avec **ln** et **exp** (fiche 1).
- Des **dérivées, limites et croissances comparées** avec **ln** (fiche 2).
- Des **études de fonctions complètes** avec **ln** (fiche 3).
- Des **suites et seuils** avec **ln**, dont le célèbre $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ (fiche 4).

Tu as maintenant le cours. Passe aux quatre fiches, aux exercices type bac, puis au Guide de rédaction du chapitre.