

Fonction logarithme : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- une étude de fonction avec fonction auxiliaire et asymptote ;
- un problème de modélisation avec exponentielle et logarithme ;
- une étude avec un carré de logarithme et un point d'inflexion.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- ensemble de définition ;
- dérivabilité justifiée ;
- règle nommée à chaque limite ;
- signe justifié ;
- tableau complet ;
- conclusion en contexte.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Pour chaque équation avec **ln** ou **exp**, écris l'ensemble de définition, les équivalences et la vérification.
- Si tu bloques sur une question, écris « on admet que... » et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : une fonction auxiliaire et une asymptote

Partie A.

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1. Étudier les variations de g . Calculer $g(1)$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

3. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
4. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. Dresser le tableau de variations de f .
5. Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de D .
6. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions α et β , avec $\alpha < \beta$, et encadrer chacune par deux entiers consécutifs ou décimaux.

Exercice 2 : un problème de modélisation avec exponentielle et logarithme

Une population de bactéries évolue selon le modèle $N(t) = 500 e^{0,3t}$. Ici $t \geq 0$ est le temps écoulé en heures et $N(t)$ le nombre de bactéries.

1. Quel est le nombre initial de bactéries ? Déterminer le sens de variation de N .
2. À quel instant la population atteint-elle 10 000 bactéries ?
3. Montrer que la durée T nécessaire pour que la population double ne dépend pas de l'instant de départ, et la calculer.
4. Montrer que $N'(t) = 0,3 N(t)$. Calculer la vitesse de croissance à l'instant $t = 10$.
5. Écrire une fonction Python qui renvoie le nombre entier d'heures à partir duquel la population dépasse un million de bactéries, puis donner la valeur renvoyée.

Exercice 3 : une étude avec le carré du logarithme

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Calculer $f''(x)$. Étudier la convexité de f et préciser le point d'inflexion.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'inflexion.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution γ dans $]0; +\infty[$, et l'encadrer à 10^{-1} près.

Les réflexes à retenir

- Une fonction avec **ln** commence par le **domaine** et les **limites** avec croissances comparées.
- Une **fonction auxiliaire** g donne le signe de f' : étudie g d'abord, et sers-t'en ensuite.
- Une équation $f(x) = k$ avec plusieurs solutions se traite **par intervalles de stricte monotonie**.
- Un **problème de modélisation** se résout avec **exp** et **ln**, et se conclut en contexte avec l'unité.
- Une droite est **asymptote** quand la limite de $f(x) - (ax + b)$ est nulle : écris cette limite.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les études de fonctions avec **ln** des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.