

Fonction logarithme : exercices type bac

Trois exercices complets, dans le style de l'épreuve du bac :

- une étude de fonction avec fonction auxiliaire et asymptote ;
- un problème de modélisation avec exponentielle et logarithme ;
- une étude avec un carré de logarithme et un point d'inflexion.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie de bac :

- ensemble de définition ;
- dérivabilité justifiée ;
- règle nommée à chaque limite ;
- signe justifié ;
- tableau complet ;
- conclusion en contexte.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 30 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme le jour du bac.
- Pour chaque équation avec **ln** ou **exp**, écris l'ensemble de définition, les équivalences et la vérification.
- Si tu bloques sur une question, écris « on admet que... » et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : une fonction auxiliaire et une asymptote

Partie A.

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1. Étudier les variations de g . Calculer $g(1)$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

3. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
4. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. Dresser le tableau de variations de f .
5. Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de D .
6. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions α et β , avec $\alpha < \beta$, et encadrer chacune par deux entiers consécutifs ou décimaux.

Correction de la question 1

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $x > 0$: $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$.

Donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

De plus $g(1) = 1 - 1 + \ln 1$.

$$g(1) = 0$$

Correction de la question 2

Comme g est strictement croissante et $g(1) = 0$: pour $0 < x < 1$, $g(x) < g(1) = 0$; pour $x > 1$, $g(x) > g(1) = 0$.

Donc $g(x) < 0$ sur $]0; 1[$, $g(1) = 0$ et $g(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.

Correction de la question 3

En 0^+

$x \rightarrow 0$, et $\frac{\ln x}{x}$ est le produit de $\ln x \rightarrow -\infty$ par $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$: $\frac{\ln x}{x} \rightarrow -\infty$. Donc $-\frac{\ln x}{x} \rightarrow +\infty$ et, par somme :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ (asymptote verticale } x = 0)$$

En $+\infty$

Par croissances comparées, $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$. Comme $x \rightarrow +\infty$, par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Correction de la question 4

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme différence de x et du quotient $\frac{\ln x}{x}$. Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$$

Donc $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. D'après la question 2 : $f' < 0$ sur $]0; 1[$, $f'(1) = 0$ et $f' > 0$ sur $]1; +\infty[$.

Tableau de variations. f est strictement décroissante sur $]0; 1]$, de la limite $+\infty$ à $f(1) = 1 - 0 = 1$. Puis strictement croissante sur $[1; +\infty[$, de 1 à la limite $+\infty$.

Le minimum de f est $f(1) = 1$.

Correction de la question 5

Pour tout $x > 0$, $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.

Donc la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Position relative

Pour $x > 0$, le signe de $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}$ est celui de $-\ln x$: positif pour $0 < x < 1$ ($\ln x < 0$), nul pour $x = 1$, négatif pour $x > 1$.

Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de D sur $]0; 1[$, en dessous sur $]1; +\infty[$, et elles se coupent au point $(1; 1)$.

Correction de la question 6

Sur $]0; 1]$

f est continue et strictement décroissante, de $+\infty$ à $f(1) = 1$.

Le nombre 2 est compris entre 1 et $+\infty$ (strictement).

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.

Sur $[1; +\infty[$

f est continue et strictement croissante, de 1 à $+\infty$.

Le nombre 2 est compris entre 1 et $+\infty$.

D'après le corollaire, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution β dans $[1; +\infty[$.

Les deux intervalles sont disjoints et $f(1) = 1 \neq 2$.

L'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions $\alpha < \beta$.

Encadrements

$f(0,4) \approx 2,69 > 2 > f(0,5) \approx 1,89$ et f est décroissante sur $]0; 1[$.

$$0,4 < \alpha < 0,5$$

$f(2) \approx 1,65 < 2 < f(3) \approx 2,63$ et f est croissante sur $[1; +\infty[$.

$$2 < \beta < 3$$

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Partie A** : $g' > 0$ justifiée, $g(1) = 0$ calculé, signe de g déduit de la stricte croissance.
- **Q3** : les deux limites sont justifiées (produit avec $\ln x \rightarrow -\infty$; croissances comparées).
- **Q4** : dérivée d'un quotient, calcul complet jusqu'à $\frac{g(x)}{x^2}$, tableau avec limites et minimum.
- **Q5** : la limite de $f(x) - x$ est écrite, l'asymptote est conclue, la position relative est justifiée par le signe de $-\ln x$.
- **Q6** : le corollaire est appliqué sur deux intervalles, avec k strictement compris entre les valeurs, puis les encadrements sont justifiés par deux valeurs de f .

Exercice 2 : un problème de modélisation avec exponentielle et logarithme

Une population de bactéries évolue selon le modèle $N(t) = 500 e^{0,3t}$. Ici $t \geq 0$ est le temps écoulé en heures et $N(t)$ le nombre de bactéries.

1. Quel est le nombre initial de bactéries ? Déterminer le sens de variation de N .
2. À quel instant la population atteint-elle 10 000 bactéries ?
3. Montrer que la durée T nécessaire pour que la population double ne dépend pas de l'instant de départ, et la calculer.
4. Montrer que $N'(t) = 0,3 N(t)$. Calculer la vitesse de croissance à l'instant $t = 10$.
5. Écrire une fonction Python qui renvoie le nombre entier d'heures à partir duquel la population dépasse un million de bactéries, puis donner la valeur renvoyée.

Correction de la question 1

Le nombre initial est $N(0) = 500 e^0$.

$$N(0) = 500$$

La fonction N est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $N'(t) = 500 \times 0,3 e^{0,3t} = 150 e^{0,3t} > 0$.

Donc N est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Correction de la question 2

Pour $t \geq 0$:

$$N(t) = 10\,000 \iff 500 e^{0,3t} = 10\,000 \iff e^{0,3t} = 20 \iff 0,3t = \ln 20 \iff t = \frac{\ln 20}{0,3}$$

Comme $\frac{\ln 20}{0,3} \approx 9,99 > 0$, la solution est bien dans $[0; +\infty[$.

La population atteint 10 000 bactéries au bout d'environ 9,99 heures (soit environ 10 heures).

Correction de la question 3

Pour tout $t \geq 0$ et tout $T > 0$:

$$N(t+T) = 500 e^{0,3(t+T)} = 500 e^{0,3t} \times e^{0,3T} = N(t) \times e^{0,3T}$$

$$\text{Donc } N(t+T) = 2N(t) \iff e^{0,3T} = 2 \text{ (car } N(t) > 0) \iff 0,3T = \ln 2 \iff T = \frac{\ln 2}{0,3}.$$

Cette valeur ne dépend pas de t .

Le temps de doublement est $T = \frac{\ln 2}{0,3} \approx 2,31$ heures, quel que soit l'instant de départ.

Correction de la question 4

D'après la question 1 : $N'(t) = 500 \times 0,3 e^{0,3t} = 0,3 \times (500 e^{0,3t})$.

Donc $N'(t) = 0,3 N(t)$.

À l'instant $t = 10$: $N(10) = 500 e^3 \approx 10\,043$. Donc $N'(10) = 0,3 \times N(10) \approx 3\,013$.

La population croît d'environ 3 013 bactéries par heure à l'instant $t = 10$.

Correction de la question 5

```
from math import exp

def heures():
    t = 0
    while 500*exp(0.3*t) <= 1000000:
        t = t + 1
    return t
```

La boucle se termine car $N(t) \rightarrow +\infty$.

On cherche le plus petit entier t tel que $500 e^{0,3t} > 10^6$. Soit $e^{0,3t} > 2\,000$, soit $0,3t > \ln 2\,000$, soit $t > \frac{\ln 2\,000}{0,3} \approx 25,34$.

La fonction renvoie 26.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : $N(0)$ calculé, signe de N' justifié.
- **Q2** : équivalences successives, passage à $\ln$, vérification que $t \geq 0$, réponse en contexte avec l'unité.
- **Q3** : le calcul $N(t+T) = N(t) e^{0,3T}$ est écrit, l'indépendance vis-à-vis de t est énoncée.
- **Q4** : $N' = 0,3 N$ démontré, valeur numérique interprétée avec l'unité.

- **Q5** : condition du `while` correcte, terminaison justifiée, valeur justifiée par un calcul avec $\ln$.

Exercice 3 : une étude avec le carré du logarithme

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Calculer $f''(x)$. Étudier la convexité de f et préciser le point d'inflexion.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'inflexion.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution γ dans $]0; +\infty[$, et l'encadrer à 10^{-1} près.

Correction de la question 1

En 0^+

Posons $X = \sqrt{x} \rightarrow 0^+$. Alors $x(\ln x)^2 = X^2(2\ln X)^2 = 4(X \ln X)^2$. Par croissances comparées, $X \ln X \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow 0^+$. Par composition avec la fonction carré :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

En $+\infty$

$x \rightarrow +\infty$ et $(\ln x)^2 \rightarrow +\infty$. Par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Correction de la question 2

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de x et de $(\ln x)^2$. On applique $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = x$, $v(x) = (\ln x)^2$, $v'(x) = \frac{2\ln x}{x}$.

$$\text{Pour tout } x > 0 : f'(x) = (\ln x)^2 + x \times \frac{2\ln x}{x} = (\ln x)^2 + 2\ln x.$$

$$f'(x) = \ln x (\ln x + 2)$$

Le signe de $f'(x)$ est celui du produit $\ln x \times (\ln x + 2)$. Ses racines correspondent à $\ln x = 0$ ($x = 1$) et $\ln x = -2$ ($x = e^{-2}$). Il est positif si $\ln x < -2$ ou $\ln x > 0$, négatif entre les deux.

Donc $f' > 0$ sur $]0; e^{-2}[$, $f' < 0$ sur $]e^{-2}; 1[$, $f' > 0$ sur $]1; +\infty[$.

Tableau de variations. f est strictement croissante sur $]0; e^{-2}]$ (de 0 à $f(e^{-2}) = e^{-2} \times 4 = 4e^{-2} \approx 0,54$).

Puis strictement décroissante sur $[e^{-2}; 1]$ (de $4e^{-2}$ à $f(1) = 0$).

Puis strictement croissante sur $[1; +\infty[$ (de 0 à $+\infty$).

Correction de la question 3

La fonction f' est dérivable sur $]0; +\infty[$. Avec $f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x$: $f''(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x}$.

$$f''(x) = \frac{2(\ln x + 1)}{x}$$

Comme $x > 0$, $f''(x)$ est du signe de $\ln x + 1$, positif si $\ln x > -1$, soit $x > e^{-1}$.

Donc f est concave sur $]0; \frac{1}{e}]$ et convexe sur $[\frac{1}{e}; +\infty[$.

Comme f'' s'annule en changeant de signe en $\frac{1}{e}$, le point d'abscisse $\frac{1}{e}$ est un point d'inflexion. Et $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times (-1)^2 = \frac{1}{e}$.

Le point d'inflexion est $\left(\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$.

Correction de la question 4

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{e} \left(\ln \frac{1}{e} + 2 \right) = (-1)(-1 + 2) = -1.$$

La tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ a pour équation :

$$y = f\left(\frac{1}{e}\right) + f'\left(\frac{1}{e}\right) \left(x - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - \left(x - \frac{1}{e}\right)$$

Elle a pour équation $y = -x + \frac{2}{e}$.

Correction de la question 5

Sur $]0; 1]$

D'après le tableau, $f(x) \leq f(e^{-2}) = 4e^{-2} \approx 0,54 < 1$. Donc $f(x) = 1$ n'a aucune solution sur $]0; 1]$.

Sur $[1; +\infty[$

f est continue et strictement croissante, de 0 à $+\infty$.

Le nombre 1 est compris entre 0 et $+\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution γ dans $]1; +\infty[$, donc une unique solution dans $]0; +\infty[$.

Encadrement

$$f(2) = 2(\ln 2)^2 \approx 0,96 < 1$$

$$f(2,1) = 2,1 (\ln 2,1)^2 \approx 1,16 > 1$$

Comme f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$:

$$2 < \gamma < 2,1$$

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : le changement de variable $X = \sqrt{x}$ est écrit, les croissances comparées sont citées.
- **Q2** : dérivabilité, formule $(uv)'$ citée, factorisation, signe d'un produit de deux facteurs justifié, tableau avec limites et valeurs.
- **Q3** : f'' calculée et factorisée, signe justifié, point d'inflexion avec ses deux coordonnées.
- **Q4** : $f\left(\frac{1}{e}\right)$ et $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ calculés avant d'écrire l'équation.
- **Q5** : absence de solution sur $]0; 1]$ justifiée par le maximum local, corollaire appliqué sur $[1; +\infty[$, encadrement justifié.

Les réflexes à retenir

- Une fonction avec **ln** commence par le **domaine** et les **limites** avec croissances comparées.
- Une **fonction auxiliaire** g donne le signe de f' : étudie g d'abord, et sers-t'en ensuite.
- Une équation $f(x) = k$ avec plusieurs solutions se traite **par intervalles de stricte monotonie**.
- Un **problème de modélisation** se résout avec **exp** et **ln**, et se conclut en contexte avec l'unité.
- Une droite est **asymptote** quand la limite de $f(x) - (ax + b)$ est nulle : écris cette limite.

Aller plus loin avec les vrais sujets

Quand tu es à l'aise avec ce chapitre, entraîne-toi sur les études de fonctions avec **ln** des sujets officiels des années précédentes.

Ils sont disponibles sur le site de l'[APMEP](https://apmep.fr/).

Chronomètre-toi et rédige comme le jour du bac.