

Fonction logarithme**Fiche Standard**

Nom : _____

Date : _____

Exercice S1 : Équations et inéquationsRésoudre dans $\mathbb{R}$, en justifiant l'ensemble de définition et en vérifiant les solutions.

- $2 \ln(x-1) = \ln(x+5)$.
- $\ln((x-1)^2) = \ln(x+5)$. Expliquer pourquoi les ensembles de solutions des questions 1 et 2 sont différents.
- $\ln x + \ln(x+3) > \ln 10$.
- $2e^x + 3e^{-x} = 5$.

Exercice S2 : Étude de $\frac{2 \ln x}{x^2}$ Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

- Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}$.
- Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2(1-2 \ln x)}{x^3}$, puis dresser le tableau de variations de f avec la valeur exacte de son maximum.
- Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
- On admet que $f''(x) = \frac{2(6 \ln x - 5)}{x^4}$. Étudier la convexité de f et préciser l'abscisse du point d'inflexion.
- Discuter, selon le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice S3 : Fonction auxiliaire**Partie A.** Soit $g(x) = x^2 - 2 + 2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

- Étudier les variations de g et déterminer ses limites en 0^+ et en $+\infty$.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α , et que $1,24 < \alpha < 1,25$. En déduire le signe de g .

Partie B. Soit $f(x) = x + 1 - \frac{2 \ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$, et $\mathcal{C}$ sa courbe.

- Déterminer la limite de f en 0^+ . Montrer que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D .
- Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variations de f .
- Montrer que $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \frac{2}{\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ puis le signe de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice S4 : Niveau sonore et logarithme décimal

Le logarithme décimal est la fonction $\log$ définie sur $]0; +\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. Le niveau sonore, en décibels (dB), d'un son d'intensité I (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) est $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ avec $I_0 = 10^{-12}$.

- Montrer que $\log(10^k) = k$ pour tout entier relatif k et que $\log(ab) = \log a + \log b$ pour $a, b > 0$. Calculer le niveau sonore d'un son d'intensité 10^{-6} .
- Montrer que, si l'intensité est multipliée par 10, le niveau sonore augmente de 10 dB. De combien augmente-t-il si l'intensité est multipliée par 2? (arrondir à 0,01 près)
- Deux machines de 70 dB chacune fonctionnent ensemble.
Les intensités s'ajoutent : quel est le niveau sonore total, arrondi à l'unité?
- Combien de machines identiques à 70 dB faut-il faire fonctionner ensemble pour dépasser 85 dB?

Exercice S5 : Une suite et le logarithme

On définit $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4\sqrt{u_n}$.

1. Calculer u_1 (valeur exacte). Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose $v_n = \ln u_n$. Montrer que $v_{n+1} = 2 \ln 2 + \frac{1}{2}v_n$.
3. On pose $w_n = v_n - 4 \ln 2$. Montrer que (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et préciser w_0 .
4. En déduire que $u_n = 16 \times 2^{-3/2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer le sens de variation de (u_n) et sa limite.
6. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 15,9$.

Exercice S6 : Une équation et la dichotomie

Soit $f(x) = x \ln x - 2$ sur $]0; +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. Montrer que $f'(x) = \ln x + 1$ et dresser le tableau de variations de f (on donne $f\left(\frac{1}{e}\right) = -2 - \frac{1}{e}$).
2. Montrer que $f(x) < 0$ pour tout $x \in]0; 1]$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$, et que $2 < \alpha < 3$.
3. On exécute la fonction suivante.

```
from math import log
```

```
def f(x):
    return x * log(x) - 2
```

```
def dichotomie(a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(m) > 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

- a) Pour `dichotomie(2, 3, 0.01)`, donner les valeurs successives de `m`, `a` et `b` pendant les trois premiers passages dans la boucle (on donne $f(2,5) > 0$, $f(2,25) < 0$, $f(2,375) > 0$).
- b) Le programme renvoie un encadrement de α d'amplitude $\frac{1}{2^7}$. Pourquoi ? Donner cet encadrement.

Exercice S7 : Datation au carbone 14

Le nombre d'atomes de carbone 14 d'un échantillon à l'instant t (en années) est $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, où N_0 est le nombre initial et $\lambda > 0$ une constante. La demi-vie du carbone 14 est 5 730 ans : $N(5\,730) = \frac{N_0}{2}$.

1. Montrer que $\lambda = \frac{\ln 2}{5\,730}$ et donner une valeur approchée de λ à 10^{-7} près.
2. Montrer que la proportion d'atomes restants après une durée D , $\frac{N(t+D)}{N(t)}$, ne dépend pas de t .
3. Un échantillon contient 64 % de son carbone 14 initial. Déterminer son âge, arrondi à l'année.
4. Au bout de combien d'années un échantillon contient-il moins de 1 % de son carbone 14 initial ?

Exercice S8 : Limites et changement de variable

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (\ln x)^2)$.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $x(\ln x)^2 = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2$.

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$ en utilisant $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$.

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$.

Exercice S9 : Algorithme de Briggs

Au xvii^e siècle, Briggs calcule des logarithmes en extrayant de nombreuses racines carrées successives. Pour $a > 0$, on définit la suite (a_k) par $a_0 = a$ et $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $\ln a_k = \frac{\ln a}{2^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k$.

2. a) Justifier que $\ln t \leq t - 1$ pour tout $t > 0$ (position de la courbe de $\ln$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1). En appliquant cette inégalité à $\frac{1}{t}$, montrer que $1 - \frac{1}{t} \leq \ln t$.

b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2^k \left(1 - \frac{1}{a_k}\right) \leq \ln a \leq 2^k (a_k - 1)$.

3. On considère les fonctions suivantes.

```
from math import sqrt
```

```
def racines(a, k):
    liste = [a]
    for i in range(k):
        liste.append(sqrt(liste[-1]))
    return liste
```

```
def briggs(a, k):
    r = racines(a, k)[-1]
    return 2**k * (1 - 1/r), 2**k * (r - 1)
```

a) Donner la liste renvoyée par `racines(2, 3)` (valeurs arrondies à 10^{-4}).

b) Que représentent les deux valeurs renvoyées par `briggs(2, 3)` ? Les calculer (arrondies à 10^{-4}) et vérifier qu'elles encadrent $\ln 2$.

c) L'appel `briggs(2, 10)` renvoie (0,69291 ; 0,69338) à 10^{-5} près. En déduire une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-3} près.

d) On exécute `for r in racines(2, 3): print(r - 1)`. Qu'affiche-t-on ? Quelle propriété de la suite (a_k) cela illustre-t-il ?

4. Montrer que l'amplitude de l'encadrement de la question 2.b est $\Delta_k = \frac{2^k (a_k - 1)^2}{a_k}$. On cherche le plus petit entier k tel que $\Delta_k < 10^{-3}$ pour $a = 2$. Compléter la condition de la boucle ci-dessous, puis donner la valeur renvoyée par `plus_petit_k(2, 1e-3)` en justifiant avec les valeurs de Δ_8 et Δ_9 .

```
def plus_petit_k(a, e):
    k = 0
    while .....:
        k = k + 1
    return k
```

Exercice S10 : Croissances comparées avec x^n

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On rappelle que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0$.

1. Pour $x > 0$, on pose $X = x^n$. Montrer que $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{n} \times \frac{\ln X}{X}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$.
2. Montrer de même que $x^n \ln x = \frac{1}{n} X \ln X$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x$.
3. Déterminer les limites suivantes.
 - a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 4 \ln x)$;
 - b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 \ln x - x)$;
 - c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1}$;
 - d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2}$.
4. Expliquer pourquoi la limite de la question 3.d n'est pas une forme indéterminée, alors que celle de la question 1 (avec $n = 2$) en est une.