

Corrigé : Fonction logarithme

Fiche Standard

S1.

1. *Définition* : $x-1 > 0$ et $x+5 > 0$, soit $x > 1$. Pour $x > 1$, $2\ln(x-1) = \ln((x-1)^2)$, donc l'équation équivaut à $(x-1)^2 = x+5$, soit $x^2 - 3x - 4 = 0$, c'est-à-dire $(x-4)(x+1) = 0$. Donc $x = 4$ ou $x = -1$. Seul 4 est strictement supérieur à 1.

Conclusion : $S = \{4\}$.

2. *Définition* : $(x-1)^2 > 0 \iff x \neq 1$ et $x+5 > 0$, soit $D =]-5; 1[\cup]1; +\infty[$. Sur D , l'équation équivaut à $(x-1)^2 = x+5$, donc à $x = 4$ ou $x = -1$. Ces deux nombres appartiennent à D (vérification : $\ln 9 = \ln 9$ pour $x = 4$; $\ln 4 = \ln 4$ pour $x = -1$).

Conclusion : $S = \{-1; 4\}$.

Explication : $\ln((x-1)^2) = 2\ln|x-1|$ existe pour tout $x \neq 1$, alors que $2\ln(x-1)$ n'existe que pour $x > 1$. Le nombre -1 est solution de la question 2 mais pas de la question 1, car $\ln(-2)$ n'existe pas.

3. *Définition* : $x > 0$ et $x+3 > 0$, soit $x > 0$. Pour $x > 0$: $\ln x + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 3x)$. Comme $\ln$ est strictement croissante, l'inéquation équivaut à $x^2 + 3x > 10$, soit $x^2 + 3x - 10 > 0$, c'est-à-dire $(x+5)(x-2) > 0$, donc $x < -5$ ou $x > 2$. Avec $x > 0$:

Conclusion : $S =]2; +\infty[$.

4. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. En multipliant par $e^x > 0$: $2e^{2x} + 3 = 5e^x$. Avec $X = e^x > 0$: $2X^2 - 5X + 3 = 0$. Le discriminant vaut $25 - 24 = 1$, donc $X = \frac{5-1}{4} = 1$ ou $X = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$, deux valeurs strictement positives.

Donc $e^x = 1$ ou $e^x = \frac{3}{2}$.

Conclusion : $S = \left\{0; \ln \frac{3}{2}\right\}$. Vérification pour $x = \ln \frac{3}{2}$: $2 \times \frac{3}{2} + 3 \times \frac{2}{3} = 3 + 2 = 5$.

S2.

1. En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$: l'axe des ordonnées ($x = 0$) est asymptote verticale.

En $+\infty$: $f(x) = 2 \times \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}$. Par croissances comparées $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses ($y = 0$) est asymptote horizontale en $+\infty$.

2. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas. Avec $u = 2\ln x$ et $v = x^2$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x^2 - 2\ln x \times 2x}{x^4} = \frac{2x - 4x \ln x}{x^4} = \frac{2(1 - 2\ln x)}{x^3}.$$

Pour $x > 0$, $x^3 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $1 - 2\ln x$, et $1 - 2\ln x > 0 \iff \ln x < \frac{1}{2} \iff x < \sqrt{e}$. De plus

$$f(\sqrt{e}) = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{e}.$$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

Conclusion : f est strictement croissante sur $]0; \sqrt{e}]$, strictement décroissante sur $[\sqrt{e}; +\infty[$, et son maximum vaut $\frac{1}{e}$.

3. $f(1) = 0$ et $f'(1) = \frac{2(1-0)}{1} = 2$. La tangente est $y = 2(x-1)$.

Conclusion : $y = 2x - 2$.

4. Pour $x > 0$, $x^4 > 0$: $f''(x) > 0 \iff 6\ln x - 5 > 0 \iff \ln x > \frac{5}{6} \iff x > e^{5/6}$.

Conclusion : f est concave sur $]0; e^{5/6}]$ et convexe sur $[e^{5/6}; +\infty[$. La courbe a un point d'inflexion d'abscisse $e^{5/6} \approx 2,30$ (ordonnée $\frac{5}{3e^{5/3}} \approx 0,32$).

5. Sur $I_1 =]0; \sqrt{e}]$, f est continue et strictement croissante, de limite $-\infty$ à $\frac{1}{e}$: elle réalise une bijection de I_1 sur $] -\infty; \frac{1}{e}]$. Sur $I_2 = [\sqrt{e}; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, de $\frac{1}{e}$ à la limite 0 (non atteinte) : bijection de I_2 sur $]0; \frac{1}{e}]$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

- si $m > \frac{1}{e}$: aucune solution ;
- si $m = \frac{1}{e}$: une seule solution, $x = \sqrt{e}$;
- si $0 < m < \frac{1}{e}$: deux solutions, une dans chaque intervalle ;
- si $m \leq 0$: une seule solution, dans I_1 (pour $m = 0$, c'est $x = 1$).

S3. Partie A.

1. g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) = 2x + \frac{2}{x} > 0$: g est strictement croissante. En 0^+ : $x^2 - 2 \rightarrow -2$ et $2 \ln x \rightarrow -\infty$, donc $g(x) \rightarrow -\infty$. En $+\infty$: $x^2 \rightarrow +\infty$ et $2 \ln x \rightarrow +\infty$, donc $g(x) \rightarrow +\infty$.
2. g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, de $-\infty$ à $+\infty$; 0 est dans l'intervalle image. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $g(x) = 0$ admet une unique solution α . Or $g(1,24) \approx -0,032 < 0$ et $g(1,25) \approx 0,009 > 0$, donc $1,24 < \alpha < 1,25$ par stricte croissance.
- Conclusion** : $g(x) < 0$ sur $]0; \alpha[$, $g(\alpha) = 0$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

Partie B.

3. En 0^+ : $\frac{\ln x}{x} = \ln x \times \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ (produit de $-\infty$ par $+\infty$), donc $-2\frac{\ln x}{x} \rightarrow +\infty$. Avec $x+1 \rightarrow 1$, par somme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ($x=0$ est asymptote verticale).

Asymptote oblique : $f(x) - (x+1) = -\frac{2 \ln x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$ (croissances comparées). Donc $D : y = x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Position : $f(x) - (x+1) = -\frac{2 \ln x}{x}$ a le signe de $-\ln x$: positif sur $]0; 1[$, nul en 1, négatif sur $]1; +\infty[$.

Conclusion : $\mathcal{C}$ est au-dessus de D sur $]0; 1[$, en dessous sur $]1; +\infty[$, et coupe D au point $(1; 2)$.

4. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = 1 - 2 \times \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = 1 - \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} = \frac{x^2 - 2 + 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$: négatif sur $]0; \alpha[$, positif sur $]\alpha; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

5. Comme $g(\alpha) = 0$: $2 \ln \alpha = 2 - \alpha^2$, donc $\frac{2 \ln \alpha}{\alpha} = \frac{2 - \alpha^2}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} - \alpha$. Alors $f(\alpha) = \alpha + 1 - \frac{2}{\alpha} + \alpha = 2\alpha + 1 - \frac{2}{\alpha}$.

La fonction $h : t \mapsto 2t + 1 - \frac{2}{t}$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ ($h'(t) = 2 + \frac{2}{t^2} > 0$). Avec $1,24 < \alpha < 1,25$: $h(1,24) < f(\alpha) < h(1,25)$, avec $h(1,24) \approx 1,867$ et $h(1,25) = 1,9$.

Conclusion : $1,86 < f(\alpha) < 1,9$. Le minimum de f est $f(\alpha) > 0$, donc $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$: la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

S4.

1. $\log(10^k) = \frac{k \ln 10}{\ln 10} = k$. Pour $a, b > 0$: $\log(ab) = \frac{\ln a + \ln b}{\ln 10} = \log a + \log b$. Pour $I = 10^{-6}$: $\frac{I}{I_0} = 10^6$, donc $L = 10 \log(10^6) = 60$.

Conclusion : le niveau sonore est 60 dB.

2. $L(10I) = 10 \log \frac{10I}{I_0} = 10 \left(\log 10 + \log \frac{I}{I_0} \right) = 10 + L(I)$, car $\log 10 = 1$. Si l'intensité est multipliée par 2 : $L(2I) = L(I) + 10 \log 2$ avec $10 \log 2 = \frac{10 \ln 2}{\ln 10} \approx 3,01$.

Conclusion : multiplier l'intensité par 10 ajoute 10 dB ; la multiplier par 2 ajoute environ 3,01 dB.

3. Pour une machine, $70 = 10 \log \frac{I_1}{I_0}$ donne $\frac{I_1}{I_0} = 10^7$, soit $I_1 = 10^{-5}$. L'intensité totale est $2I_1$, donc $L = 70 + 10 \log 2 \approx 73,01$.

Conclusion : le niveau sonore total est d'environ 73 dB (et non 140 dB).

4. Avec n machines, $I = n \times 10^{-5}$ et $L = 10 \log (n \times 10^7) = 70 + 10 \log n$. Comme $\log$ est strictement croissante : $L > 85 \iff \log n > 1,5 \iff n > 10^{1,5} = 10\sqrt{10} \approx 31,6$. Vérification : $L(31) \approx 84,91$ et $L(32) \approx 85,05$.

Conclusion : il faut au moins 32 machines.

S5.

1. $u_1 = 4\sqrt{2}$. Soit $P(n)$: « $u_n > 0$ ». $P(0)$ est vraie car $u_0 = 2 > 0$. Si $u_n > 0$, alors $\sqrt{u_n} > 0$ et $u_{n+1} = 4\sqrt{u_n} > 0$: $P(n+1)$ est vraie. Par récurrence, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Puisque $u_n > 0$, v_n est bien défini et $v_{n+1} = \ln(4\sqrt{u_n}) = \ln 4 + \frac{1}{2} \ln u_n = 2 \ln 2 + \frac{1}{2} v_n$.

3. $w_{n+1} = v_{n+1} - 4 \ln 2 = \frac{1}{2} v_n - 2 \ln 2 = \frac{1}{2} (v_n - 4 \ln 2) = \frac{1}{2} w_n$.

Conclusion : (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $w_0 = \ln 2 - 4 \ln 2 = -3 \ln 2$.

4. $w_n = -3 \ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{3 \ln 2}{2^n}$, donc $v_n = 4 \ln 2 - \frac{3 \ln 2}{2^n}$ et

$$u_n = e^{v_n} = e^{4 \ln 2} \times e^{-\frac{3}{2^n} \ln 2} = 2^4 \times 2^{-3/2^n}.$$

Conclusion : $u_n = 16 \times 2^{-3/2^n}$ (vérification : $u_0 = 16 \times 2^{-3} = 2$).

5. $w_{n+1} - w_n = \frac{3 \ln 2}{2^{n+1}} > 0$: (w_n) est croissante, donc $(v_n) = (4 \ln 2 + w_n)$ aussi, donc $(u_n) = (e^{v_n})$ aussi car $\exp$ est croissante. Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ (raison dans $] -1 ; 1[$), $w_n \rightarrow 0$, $v_n \rightarrow 4 \ln 2$ et, par continuité de $\exp$, $u_n \rightarrow e^{4 \ln 2} = 16$.

Conclusion : (u_n) est croissante et converge vers 16.

6. $u_n = 16 \times 2^{-3/2^n}$, donc $u_n > 15,9 \iff \ln \frac{u_n}{16} > \ln \frac{15,9}{16} \iff -\frac{3 \ln 2}{2^n} > \ln \frac{15,9}{16} \iff \frac{3 \ln 2}{2^n} < \ln \frac{16}{15,9} \iff 2^n > \frac{3 \ln 2}{\ln \frac{16}{15,9}} \approx 331,7$. En passant au logarithme : $n \ln 2 > \ln 331,7$, soit $n > \frac{\ln 331,7}{\ln 2} \approx 8,37$. Vérification : $u_8 \approx 15,871 < 15,9 < u_9 \approx 15,935$.

Conclusion : le plus petit entier est $n = 9$.

S6.

1. *Limites* : en 0^+ , $x \ln x \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc $f(x) \rightarrow -2$. En $+\infty$, $x \rightarrow +\infty$ et $\ln x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

$$f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1, \text{ et } \ln x + 1 > 0 \iff x > \frac{1}{e}.$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	-2	$-2 - \frac{1}{e}$	$+\infty$

2. Pour $0 < x \leq 1$: $\ln x \leq 0$, donc $x \ln x \leq 0$ et $f(x) \leq -2 < 0$. Il n'y a donc aucune solution dans $]0 ; 1]$. Sur $[1 ; +\infty[$, f est continue et strictement croissante (car $1 > \frac{1}{e}$), de $f(1) = -2$ à $+\infty$: 0 est dans l'intervalle image, donc $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1 ; +\infty[$, et c'est la seule sur $]0 ; +\infty[$. Enfin $f(2) = 2 \ln 2 - 2 \approx -0,61 < 0$ et $f(3) = 3 \ln 3 - 2 \approx 1,30 > 0$, donc $2 < \alpha < 3$.

- a) Passage 1 : $m = 2,5$, $f(m) > 0$ donc $b = 2,5$; on a $(a ; b) = (2 ; 2,5)$. Passage 2 : $m = 2,25$, $f(m) < 0$ donc $a = 2,25$; $(a ; b) = (2,25 ; 2,5)$. Passage 3 : $m = 2,375$, $f(m) > 0$ donc $b = 2,375$; $(a ; b) = (2,25 ; 2,375)$.

- b) À chaque passage, l'amplitude $b - a$ est divisée par 2 : après k passages elle vaut $\frac{1}{2^k}$. La boucle s'arrête dès que $\frac{1}{2^k} \leq 0,01$, c'est-à-dire $2^k \geq 100$, donc $k = 7$ (car $2^6 = 64 < 100 \leq 128 = 2^7$). L'amplitude finale

est $\frac{1}{128}$. Le programme renvoie (2,34375 ; 2,3515625) : $2,34375 < \alpha < 2,3515625$.

S7.

$$1. N(5730) = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow e^{-5730\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -5730\lambda = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{5730}.$$

Conclusion : $\lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 0,0001210$.

$$2. \frac{N(t+D)}{N(t)} = \frac{N_0 e^{-\lambda(t+D)}}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda D}, \text{ qui ne dépend pas de } t.$$

$$3. \frac{N(t)}{N_0} = 0,64 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 0,64 \Leftrightarrow -\lambda t = \ln 0,64 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 0,64}{\lambda} = -\frac{5730 \ln 0,64}{\ln 2} \approx 3689,3.$$

Conclusion : l'échantillon a environ 3689 ans.

$$4. \frac{N(t)}{N_0} < 0,01 \Leftrightarrow -\lambda t < \ln 0,01. \text{ Comme } -\lambda < 0 \text{ (donc } \lambda > 0), \text{ on divise en changeant le sens : } t > -\frac{\ln 0,01}{\lambda} = \frac{5730 \ln 100}{\ln 2} \approx 38069,3.$$

Conclusion : il reste moins de 1 % du carbone 14 initial à partir d'environ 38070 ans.

S8.

1. Pour $x > 0$, $x = (\sqrt{x})^2$, donc $\ln x = 2 \ln \sqrt{x}$ et $(\ln x)^2 = 4 (\ln \sqrt{x})^2$. Alors

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{4 (\ln \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $X = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$ et $\frac{\ln X}{X} \rightarrow 0$ (croissances comparées). Par composition et produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0.$$

Ensuite $x - (\ln x)^2 = x \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right)$: le facteur entre parenthèses tend vers 1 et $x \rightarrow +\infty$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (\ln x)^2) = +\infty$.

2. $x(\ln x)^2 = (\sqrt{x})^2 \times 4 (\ln \sqrt{x})^2 = 4 (\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $X = \sqrt{x} \rightarrow 0^+$ et $X \ln X \rightarrow 0$ (croissances comparées).

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$.

3. Pour $x \neq 0$ proche de 0 : $\frac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \times \frac{\ln(1+3x)}{3x}$. Quand $x \rightarrow 0$, $u = 3x \rightarrow 0$ et $\frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 1$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = 3$.

4. Pour $x > 0$: $x(\ln(x+1) - \ln x) = x \ln \frac{x+1}{x} = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{\ln(1+u)}{u}$ avec $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x) = 1$.

S9.

1. Pour $k = 0$: $\ln a_0 = \ln a = \frac{\ln a}{2^0}$. Si $\ln a_k = \frac{\ln a}{2^k}$ (avec $a_k > 0$), alors $a_{k+1} = \sqrt{a_k} > 0$ et $\ln a_{k+1} = \ln \sqrt{a_k} = \frac{1}{2} \ln a_k = \frac{\ln a}{2^{k+1}}$. La propriété est héréditaire, donc vraie pour tout k .

Ainsi $a_k = e^{\ln a / 2^k}$. Quand $k \rightarrow +\infty$, $\frac{\ln a}{2^k} \rightarrow 0$ et, par continuité de l'exponentielle, $a_k \rightarrow e^0 = 1$.

Conclusion : $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 1$.

2. a) La fonction $\ln$ est concave sur $]0; +\infty[$ ($\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$) : sa courbe est en dessous de ses tangentes.

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \ln'(1)(t-1) + \ln 1 = t-1$, donc $\ln t \leq t-1$ pour tout $t > 0$. En appliquant ce résultat à $\frac{1}{t} > 0$: $\ln \frac{1}{t} \leq \frac{1}{t} - 1$, soit $-\ln t \leq \frac{1}{t} - 1$, donc $1 - \frac{1}{t} \leq \ln t$.

b) Avec $t = a_k > 0$: $1 - \frac{1}{a_k} \leq \ln a_k = \frac{\ln a}{2^k} \leq a_k - 1$. On multiplie par $2^k > 0$.

Conclusion : $2^k \left(1 - \frac{1}{a_k} \right) \leq \ln a \leq 2^k (a_k - 1)$.

3. a) `racines(2, 3)` renvoie la liste $[a_0; a_1; a_2; a_3]$ avec $a_1 = \sqrt{2} \approx 1,4142$, $a_2 = 2^{1/4} \approx 1,1892$, $a_3 = 2^{1/8} \approx 1,0905$: $[2; 1,4142; 1,1892; 1,0905]$.
- b) La première valeur est la borne inférieure $2^k \left(1 - \frac{1}{a_k}\right)$ et la seconde la borne supérieure $2^k(a_k - 1)$ de l'encadrement de $\ln a$. Pour $k = 3 : 8 \left(1 - \frac{1}{1,0905 \dots}\right) \approx 0,6640$ et $8(1,0905 \dots - 1) \approx 0,7241$. Le programme renvoie $(0,6640; 0,7241)$ et $0,6640 < \ln 2 \approx 0,6931 < 0,7241$.
- c) $0,69291 \leq \ln 2 \leq 0,69338$: on retient $\ln 2 \approx 0,693$ (l'écart avec chaque borne est inférieur à 10^{-3}).
- d) La boucle parcourt les éléments de la liste et affiche $a_k - 1$ pour $k = 0, 1, 2, 3 : 1$, puis environ $0,4142$, $0,1892$ et $0,0905$. Ces valeurs décroissent vers 0 : cela illustre $a_k \rightarrow 1$ (question 1).
4. $\Delta_k = 2^k(a_k - 1) - 2^k \left(1 - \frac{1}{a_k}\right) = 2^k \left(a_k - 2 + \frac{1}{a_k}\right) = \frac{2^k(a_k^2 - 2a_k + 1)}{a_k} = \frac{2^k(a_k - 1)^2}{a_k}$.
- On complète par la ligne suivante (on continue tant que l'amplitude Δ_k n'est pas strictement inférieure à ϵ , avec $a_k = a^{1/2^k}$) :
- ```
while 2**k * (a**(1/2**k) - 1)**2 / a**(1/2**k) >= e:
```
- Pour  $a = 2$  :  $\Delta_5 \approx 0,0150$ ,  $\Delta_6 \approx 0,0075$ ,  $\Delta_7 \approx 0,0038$ ,  $\Delta_8 \approx 0,0019 \geq 10^{-3}$  et  $\Delta_9 \approx 0,00094 < 10^{-3}$  (les valeurs de  $\Delta_k$  sont à peu près divisées par 2 à chaque étape ; pour  $k \leq 4$ , elles sont encore plus grandes).
- Conclusion :** `plus_petit_k(2, 1e-3)` renvoie 9.

## S10.

1. Pour  $x > 0$  et  $X = x^n$  :  $\ln X = n \ln x$ , donc  $\ln x = \frac{1}{n} \ln X$  et  $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{n} \times \frac{\ln X}{X}$ . Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $X = x^n \rightarrow +\infty$  et  $\frac{\ln X}{X} \rightarrow 0$ .
- Conclusion :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ .
2.  $x^n \ln x = X \times \frac{1}{n} \ln X = \frac{1}{n} X \ln X$ . Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,  $X = x^n \rightarrow 0^+$  et  $X \ln X \rightarrow 0$ .
- Conclusion :**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ .
3. a)  $x^3 - 4 \ln x = x^3 \left(1 - 4 \frac{\ln x}{x^3}\right)$ . Le facteur entre parenthèses tend vers 1 (question 1 avec  $n = 3$ ) et  $x^3 \rightarrow +\infty$ .
- Limite :**  $+\infty$ .
- b)  $2x^2 \ln x \rightarrow 0$  (question 2 avec  $n = 2$ ) et  $x \rightarrow 0$ . **Limite :** 0.
- c)  $\frac{\ln x}{x^2 + 1} = \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 + 1}$ , avec  $\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow 0$  et  $\frac{x^2}{x^2 + 1} \rightarrow 1$ . **Limite :** 0.
- d) Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,  $\ln x \rightarrow -\infty$  et  $x^2 \rightarrow 0^+$ , donc  $\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow -\infty$ . **Limite :**  $-\infty$ .
4. En  $+\infty$ ,  $\ln x$  et  $x^2$  tendent tous deux vers  $+\infty$  : la forme  $\frac{\infty}{\infty}$  est indéterminée et il faut comparer les croissances (le dénominateur l'emporte). En  $0^+$ , le numérateur tend vers  $-\infty$  et le dénominateur vers  $0^+$  : il n'y a pas de compétition, le quotient d'un nombre qui tend vers  $-\infty$  par un nombre positif qui tend vers 0 tend vers  $-\infty$ .