

Fonction logarithme

Fiche Défi

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Démonstrations du cours

On utilise uniquement la définition : pour tout $x > 0$, $\ln x$ est l'unique réel y tel que $e^y = x$, les propriétés de l'exponentielle et la dérivée $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Partie A : relation fonctionnelle.

1. Soit $a > 0$ et $b > 0$. Calculer $e^{\ln a + \ln b}$ et en déduire que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
2. En déduire que $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$, que $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, que $\ln(a^n) = n \ln a$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (récurrence pour $n \in \mathbb{N}$), et que $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Partie B : inégalité et limites.

3. Étudier les variations de $g : x \mapsto x - 1 - \ln x$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.
4. En appliquant cette inégalité à $\sqrt{x}$, montrer que $0 < \ln x < 2\sqrt{x}$ pour $x > 1$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ (poser $X = \frac{1}{x}$).
5. Montrer que $\ln 2 > 0$ puis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ (utiliser $\ln(2^n)$). En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$.

Exercice D2 : Une étude avec un carré de logarithme

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x - 1)^2$, et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Montrer que $f(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + x$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (on pourra utiliser l'égalité $x(\ln x)^2 = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$).
2. On prolonge f en 0 en posant $f(0) = 0$. Calculer la limite en 0^+ de $\frac{f(x) - f(0)}{x}$. Que peut-on dire de la dérivabilité de f en 0 et de la courbe $\mathcal{C}$ à l'origine ?
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = (\ln x - 1)(\ln x + 1)$. Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$ avec les valeurs exactes des extremums.
4. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f''(x) = \frac{2 \ln x}{x}$. Étudier la convexité de f . La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner ses coordonnées et l'équation de la tangente en ce point.
5. Soit m un réel. Discuter, selon les valeurs de m , le nombre de solutions dans $]0; +\infty[$ de l'équation $f(x) = m$.

Exercice D3 : Autour de $(1 + \frac{1}{n})^n$

On rappelle que, pour tout $x > 0$, $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$, avec égalité seulement pour $x = 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$, puis que $\frac{n}{n+1} \leq \ln u_n \leq 1$.
2. En déduire que $u_n \leq e$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = 1$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.
3. Soit $\varphi(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$. Montrer que $\varphi'(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, puis que $\varphi'(x) > 0$. En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante.
4. On considère le programme suivant.

```
from math import e
```

```
def seuil():
    n = 1
    while e - (1 + 1/n)**n >= 0.01:
        n = n + 1
    return n
```

Justifier que la boucle se termine. Pourquoi la valeur renvoyée est-elle un seuil, c'est-à-dire que $e - u_n < 0,01$ pour tous les entiers n à partir de cette valeur ? Que renvoie `seuil()` ?

5. Approfondissement. Soit x un réel fixé. Pour tout entier $n > |x|$, on pose $v_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. On admet que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ (nombre dérivé de $\ln$ en 1). Justifier que v_n est bien défini, puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e^x$ (traiter à part le cas $x = 0$).

Exercice D4 : Quand a-t-on $a^b = b^a$?

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1. Dresser le tableau de variations de f avec les limites aux bornes et la valeur exacte du maximum.
2. Montrer que $\pi^e < e^\pi$.
3. Soit $a < b$ deux entiers naturels non nuls tels que $a^b = b^a$. Montrer que $f(a) = f(b)$, puis que $a < e < b$. En déduire que $a \in \{1; 2\}$.
4. Montrer que $a \neq 1$, puis que le seul couple possible est $(2; 4)$. Conclure.

Exercice D5 : Un logarithme de quotient et une somme télescopique

Soit $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ (tableau de signes).
2. Montrer que f est impaire. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 1^+ , puis en déduire celles en $-\infty$ et en -1^- . Préciser les asymptotes de $\mathcal{C}$.
3. Montrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x) = \frac{-2}{x^2 - 1}$. Dresser le tableau de variations de f sur chaque intervalle de D .
4. Résoudre dans D l'équation $f(x) = \ln 3$, puis l'inéquation $f(x) \geq 1$.
5. Pour $n \geq 2$, on pose $S_n = f(2) + f(3) + \dots + f(n)$. Montrer que $S_n = \ln \frac{n(n+1)}{2}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et le plus petit entier n tel que $S_n > 10$.

Exercice D6 : Inégalité arithmético-géométrique

On utilise l'inégalité $\ln t \leq t - 1$ pour tout $t > 0$, avec égalité si et seulement si $t = 1$.

1. Soit $a > 0$ et $b > 0$, et $m = \frac{a+b}{2}$. Appliquer l'inégalité à $\frac{a}{m}$ et à $\frac{b}{m}$ pour montrer que $\sqrt{ab} \leq m$. Quand y a-t-il égalité ?
2. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs, de moyenne $m = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. Montrer que $x_1 x_2 \dots x_n \leq m^n$, avec égalité si et seulement si tous les x_i sont égaux.
3. Un parallélépipède rectangle a pour dimensions x, y, z (strictement positives, en cm) avec $x + y + z = 12$. Montrer que son volume est au plus 64 cm^3 et préciser les dimensions pour lesquelles ce maximum est atteint.
4. Montrer que, pour tous réels $a, b, c > 0$, $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Exercice D7 : Une suite définie par $\ln$

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $0 < \ln(1+x) < x$.
2. En déduire que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ .
4. Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie le plus petit entier n tel que $u_n < 0,01$, puis donner la valeur renvoyée.

```
from math import log

def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while .....:
        u = .....
        n = n + 1
    return n
```

Exercice D8 : Dérivée du logarithme et puissances réelles

Partie A : démonstration. On admet que $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

1. Pour $x > 0$, on pose $g(x) = e^{\ln x}$. Donner une autre expression de $g(x)$. Calculer $g'(x)$ en dérivant la fonction composée, puis en déduire que $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
2. Soit $a > 0$ et h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \ln(ax) - \ln x$. Calculer $h'(x)$, en déduire que h est constante, puis retrouver la relation $\ln(ax) = \ln a + \ln x$.

Partie B : approfondissement. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on définit $x^a = e^{a \ln x}$.

3. Montrer que cette définition redonne x^n lorsque $a = n$ est un entier relatif, et $\sqrt{x}$ lorsque $a = \frac{1}{2}$.
4. Montrer que $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $(x^a)' = a x^{a-1}$.
5. Soit $a > 0$. Déterminer les limites de x^a en 0^+ et en $+\infty$. En posant $X = x^a$, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0$.
6. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $x^{3/2} = 8$ et l'inéquation $x^{-1/2} < \frac{1}{3}$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto x^{\sqrt{2}}$ au point d'abscisse 1.