

Corrigé : Fonction logarithme

Fiche Défi

D1. Partie A.

1. $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$. Le réel $\ln(ab)$ est l'unique réel dont l'exponentielle vaut ab (car $ab > 0$).

Conclusion : $\ln a + \ln b = \ln(ab)$.

2. *Inverse* : $0 = \ln 1 = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{a}$, donc $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

Quotient : $\ln \frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.

Puissances, $n \in \mathbb{N}$: $\ln(a^0) = \ln 1 = 0 = 0 \times \ln a$. Si $\ln(a^n) = n \ln a$, alors $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = n \ln a + \ln a = (n+1) \ln a$. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$: $\ln(a^{-p}) = \ln \frac{1}{a^p} = -\ln(a^p) = -p \ln a = n \ln a$.

Racine : $\ln a = \ln(\sqrt{a}^2) = 2 \ln \sqrt{a}$, donc $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Partie B.

3. g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, du signe de $x-1$. Donc g est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Elle admet en 1 un minimum $g(1) = 1 - 1 - 0 = 0$, atteint uniquement en 1 (stricte monotonie de chaque côté).

Conclusion : $g(x) \geq 0$, soit $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

4. Pour $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$ donc $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x} - 1$, d'où $\ln x = 2 \ln \sqrt{x} \leq 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x}$. Pour $x > 1$, $\ln x > \ln 1 = 0$ ($\ln$ strictement croissante). Donc $0 < \ln x < 2\sqrt{x}$ puis, en divisant par $x > 0$: $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$. Comme

$\frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ en $+\infty$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Pour $x \rightarrow 0^+$, $X = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ et $x \ln x = \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = -\frac{\ln X}{X} \rightarrow 0$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.

5. $2 > 1$ et $\ln$ est strictement croissante, donc $\ln 2 > \ln 1 = 0$. Soit A un réel. Il existe un entier n tel que $n > \frac{A}{\ln 2}$. Pour $x \geq 2^n$, $\ln x \geq \ln(2^n) = n \ln 2 > A$. Tout intervalle $]A; +\infty[$ contient donc $\ln x$ pour x assez grand.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. Puis $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$ avec $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

D2.

1. $x(\ln x - 1)^2 = x((\ln x)^2 - 2 \ln x + 1) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + x$.

En $+\infty$: $\ln x - 1 \rightarrow +\infty$, donc $(\ln x - 1)^2 \rightarrow +\infty$ et, par produit avec x , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

En 0^+ : $x(\ln x)^2 = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$; avec $X = \sqrt{x} \rightarrow 0^+$, $X \ln X \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc $x(\ln x)^2 \rightarrow 0$. De plus $x \ln x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow 0$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$: f est continue en 0.

2. $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x(\ln x - 1)^2}{x} = (\ln x - 1)^2 \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Conclusion : f n'est pas dérivable en 0 ; la courbe $\mathcal{C}$ admet à l'origine une demi-tangente verticale (l'axe des ordonnées).

3. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables. Avec $u = x$ et $v = (\ln x - 1)^2$, $v' = 2(\ln x - 1) \times \frac{1}{x}$:

$$f'(x) = (\ln x - 1)^2 + x \times \frac{2(\ln x - 1)}{x} = (\ln x - 1)(\ln x - 1 + 2) = (\ln x - 1)(\ln x + 1).$$

$\ln x - 1 > 0 \iff x > e$ et $\ln x + 1 > 0 \iff x > \frac{1}{e}$. D'où le signe de f' : positif sur $]0; \frac{1}{e}[$, négatif sur $]\frac{1}{e}; e[$, positif sur $]e; +\infty[$. Valeurs : $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}(-2)^2 = \frac{4}{e}$ et $f(e) = 0$.

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	0	$\frac{4}{e}$	0	$+\infty$

Conclusion : maximum local $\frac{4}{e}$ en $\frac{1}{e}$, minimum local 0 en e (qui est aussi le minimum global, car $f \geq 0$).

4. Pour $x > 0$, $f'(x) = (\ln x)^2 - 1$, donc $f''(x) = 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$. Comme $x > 0$, f'' a le signe de $\ln x$: négatif sur $]0; 1[$, positif sur $]1; +\infty[$.

Conclusion : f est concave sur $]0; 1[$ et convexe sur $]1; +\infty[$; f'' s'annule en changeant de signe en 1, donc $\mathcal{C}$ a un point d'inflexion $I(1; 1)$ (car $f(1) = 1 \times (-1)^2 = 1$). Comme $f'(1) = (-1) \times 1 = -1$, la tangente en I a pour équation $y = -(x - 1) + 1$, soit $y = 2 - x$.

5. f est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $I_1 =]0; \frac{1}{e}]$, $I_2 = [\frac{1}{e}; e]$, $I_3 = [e; +\infty[$. Les ensembles images sont : $f(I_1) =]0; \frac{4}{e}]$ (la limite 0 en 0^+ n'est pas atteinte), $f(I_2) = [\frac{4}{e}; 0]$, $f(I_3) = [0; +\infty[$. Chaque valeur de l'ensemble image est prise une seule fois (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires). Donc :

- si $m < 0$: aucune solution ; si $m = 0$: une solution, $x = e$;
- si $0 < m < \frac{4}{e}$: trois solutions, une dans chacun des intervalles $]0; \frac{1}{e}[$, $[\frac{1}{e}; e[$ et $]e; +\infty[$;
- si $m = \frac{4}{e}$: deux solutions, $x = \frac{1}{e}$ et une dans $]e; +\infty[$;
- si $m > \frac{4}{e}$: une solution, dans $]e; +\infty[$.

D3.

1. Pour $n \geq 1$, $x = 1 + \frac{1}{n} > 0$. Alors $\ln x \leq x - 1 = \frac{1}{n}$ et $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. On multiplie par $n > 0$: $\frac{n}{n+1} \leq n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln u_n \leq 1$.

2. $\ln u_n \leq 1 = \ln e$ et $\ln$ est strictement croissante, donc $u_n \leq e$. Comme $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$, le théorème des gendarmes donne $\ln u_n \rightarrow 1$. Par continuité de $\exp$, $u_n = e^{\ln u_n} \rightarrow e^1$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.

3. φ est dérivable sur $]0; +\infty[$. Avec $(\ln(1 + \frac{1}{x}))' = \frac{-1/x^2}{1 + 1/x} = \frac{-1}{x^2 + x}$:

$$\varphi'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-1}{x(x+1)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

Posons $y = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$, avec $y \neq 1$. Alors $\ln y > 1 - \frac{1}{y} = 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1}$ (inégalité stricte car $y \neq 1$).

Donc $\varphi'(x) > 0$: φ est strictement croissante. Or $\varphi(n) = \ln u_n$, donc $\ln u_n < \ln u_{n+1}$, soit $u_n < u_{n+1}$.

Conclusion : la suite (u_n) est strictement croissante (et majorée par e).

4. Comme $u_n \rightarrow e$, $e - u_n \rightarrow 0$: la condition de la boucle devient fausse à partir d'un certain rang, donc la boucle se termine. Comme (u_n) est croissante, $(e - u_n)$ est décroissante : une fois $e - u_n < 0,01$, l'inégalité reste vraie ensuite. La valeur renvoyée est donc le plus petit entier N tel que $e - u_n < 0,01$ pour tout $n \geq N$.

Conclusion : `seuil()` renvoie 135 (on a $e - u_{134} \approx 0,010074 > 0,01$ et $e - u_{135} \approx 0,0099998 < 0,01$).

5. Pour $n > |x|$, $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$ donc $1 + \frac{x}{n} > 0$: v_n est bien défini et $\ln v_n = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$. Si $x = 0$, $v_n = 1 = e^0$ pour tout n . Si $x \neq 0$, on pose $u_n = \frac{x}{n}$ ($u_n \neq 0$ et $u_n \rightarrow 0$) :

$$\ln v_n = n \ln(1 + u_n) = x \times \frac{\ln(1 + u_n)}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \times 1 = x.$$

Par continuité de $\exp$, $v_n = e^{\ln v_n} \rightarrow e^x$.

Conclusion : pour tout réel x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ (on retrouve la question 2 pour $x = 1$).

D4.

1. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, du signe de $1 - \ln x$: positif si $x < e$. Limites : en 0^+ , $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$; en $+\infty$, $f(x) \rightarrow 0$ (croissances comparées). Maximum : $f(e) = \frac{1}{e}$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

2. f est strictement croissante sur $]0; e]$ et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$: son maximum $\frac{1}{e}$ n'est atteint qu'en e . Comme $\pi \neq e$, $f(\pi) < \frac{1}{e}$, soit $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$. En multipliant par $e\pi > 0$: $e \ln \pi < \pi$, c'est-à-dire $\ln(\pi^e) < \pi = \ln(e^\pi)$.

Conclusion : par stricte croissance de $\ln$, $\pi^e < e^\pi$.

3. Si $a^b = b^a$, alors $b \ln a = a \ln b$; en divisant par $ab > 0$: $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$, soit $f(a) = f(b)$. Si $b \leq e$, alors $a < b \leq e$ et f strictement croissante sur $]0; e]$ donnerait $f(a) < f(b)$: impossible. Si $a \geq e$, alors $e \leq a < b$ et f strictement décroissante sur $[e; +\infty[$ donnerait $f(a) > f(b)$: impossible. Donc $a < e < b$.

Conclusion : a est un entier non nul strictement inférieur à $e \approx 2,72$, donc $a \in \{1; 2\}$ (et $b \geq 3$).

4. Si $a = 1$: $1^b = 1 = b^1$ donne $b = 1 = a$, contradiction avec $a < b$. Donc $a = 2$ et $f(b) = f(2) = \frac{\ln 2}{2}$.

Or $f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2}$. Comme $b > e$, $4 > e$ et f est strictement décroissante sur $[e; +\infty[$ (donc injective), $b = 4$. Réciproquement $2^4 = 16 = 4^2$.

Conclusion : le seul couple d'entiers $a < b$ tel que $a^b = b^a$ est $(2; 4)$.

D5.

1. $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 1$ et $\frac{x+1}{x-1} > 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$
$x-1$		$-$	$-$	0
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$

Conclusion : $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

2. D est symétrique par rapport à 0 et, pour $x \in D$, $f(-x) = \ln \frac{-x+1}{-x-1} = \ln \frac{x-1}{x+1} = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{-1} = -f(x)$: f est impaire.

En $+\infty$: $\frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1/x}{1-1/x} \rightarrow 1$ et $\ln$ est continue en 1, donc $f(x) \rightarrow \ln 1 = 0$.

En 1^+ : $x+1 \rightarrow 2$ et $x-1 \rightarrow 0^+$, donc $\frac{x+1}{x-1} \rightarrow +\infty$ et, par composition, $f(x) \rightarrow +\infty$.

Par imparité : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$.

Conclusion : $\mathcal{C}$ admet pour asymptotes l'axe des abscisses (en $-\infty$ et en $+\infty$) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$.

3. Posons $u(x) = \frac{x+1}{x-1}$, strictement positive sur D : $u'(x) = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$. Donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{x^2-1}.$$

Sur D , $x^2 - 1 > 0$ (extérieur des racines), donc $f'(x) < 0$.

x	$-\infty$	-1
f'	—	
f	$0 \searrow$ $-\infty$	

x	1	$+\infty$
f'	—	
f	$+\infty \searrow$ 0	

Conclusion : f est strictement décroissante sur $] -\infty ; -1[$ (négative) et sur $]1 ; +\infty[$ (positive).

4. Pour $x \in D : f(x) = \ln 3 \iff \frac{x+1}{x-1} = 3 \iff x+1 = 3x-3 \iff x = 2$, et $2 \in D$.

Conclusion : $S = \{2\}$.

Pour $f(x) \geq 1 : f < 0$ sur $] -\infty ; -1[$, donc aucune solution dans cet intervalle. Sur $]1 ; +\infty[: f(x) \geq 1 \iff \frac{x+1}{x-1} \geq e \iff x+1 \geq e(x-1)$ (car $x-1 > 0$) $\iff 1+e \geq (e-1)x \iff x \leq \frac{e+1}{e-1}$ (car $e-1 > 0$). Or $\frac{e+1}{e-1} \approx 2,16 > 1$.

Conclusion : $S = \left]1 ; \frac{e+1}{e-1}\right]$.

5. Pour $k \geq 2, f(k) = \ln(k+1) - \ln(k-1)$. Donc

$$S_n = \sum_{k=2}^n (\ln(k+1) - \ln(k-1)) = (\ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln(n+1)) - (\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln(n-1)).$$

Les termes communs aux deux sommes se compensent (ceux de $\ln 3$ à $\ln(n-1)$, s'il y en a). Il reste $S_n = \ln n + \ln(n+1) - \ln 1 - \ln 2 = \ln \frac{n(n+1)}{2}$ (pour $n = 2$, on retrouve directement $S_2 = f(2) = \ln 3$).

Comme $\frac{n(n+1)}{2} \rightarrow +\infty$ et $\ln x \rightarrow +\infty$ en $+\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. Par ailleurs $S_n > 10 \iff \frac{n(n+1)}{2} > e^{10} \iff n^2 + n - 2e^{10} > 0$. Le trinôme a pour racine positive $\frac{-1 + \sqrt{1 + 8e^{10}}}{2} \approx 209,4$, donc $n > 209,4$.

Vérification : $\frac{209 \times 210}{2} = 21\,945 < e^{10} \approx 22\,026,5 < 22\,155 = \frac{210 \times 211}{2}$.

Conclusion : $S_n > 10$ si et seulement si $n \geq 210$; le plus petit entier est $n = 210$.

D6.

1. Avec $t = \frac{a}{m}$ et $t = \frac{b}{m}$ (strictement positifs) : $\ln \frac{a}{m} \leq \frac{a}{m} - 1$ et $\ln \frac{b}{m} \leq \frac{b}{m} - 1$. En additionnant :

$$\ln \frac{a}{m} + \ln \frac{b}{m} = \ln \frac{ab}{m^2} \leq \frac{a+b}{m} - 2 = \frac{2m}{m} - 2 = 0.$$

Donc $\ln \frac{ab}{m^2} \leq 0 = \ln 1$, d'où $\frac{ab}{m^2} \leq 1$, soit $ab \leq m^2$ et, tout étant positif, $\sqrt{ab} \leq m$.

Égalité : $ab = m^2$ si et seulement si les deux inégalités sommées sont des égalités, c'est-à-dire $\frac{a}{m} = \frac{b}{m} = 1$.

Conclusion : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, avec égalité si et seulement si $a = b$.

2. Pour chaque i , $\ln \frac{x_i}{m} \leq \frac{x_i}{m} - 1$. En sommant : $\ln \frac{x_1 \cdots x_n}{m^n} = \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{m} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{m} - n = \frac{nm}{m} - n = 0$.
Donc $\frac{x_1 \cdots x_n}{m^n} \leq 1$. L'égalité a lieu si et seulement si chaque inégalité est une égalité (comme en question 1), c'est-à-dire $x_i = m$ pour tout i .

Conclusion : $x_1 x_2 \cdots x_n \leq m^n$, avec égalité si et seulement si tous les x_i sont égaux.

3. La moyenne de x, y, z est $m = \frac{12}{3} = 4$. Par la question 2 avec $n = 3 : V = xyz \leq 4^3 = 64$, avec égalité si et seulement si $x = y = z = 4$.

Conclusion : le volume maximal est 64 cm^3 , atteint pour le cube d'arête 4 cm .

4. D'après la question 1, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$. Ces trois inégalités entre nombres strictement positifs se multiplient membre à membre : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{ab} \times bc \times ca = 8\sqrt{(abc)^2} = 8abc$.

Conclusion : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ pour tous $a, b, c > 0$.

D7.

1. Pour $x > 0$, $1+x > 1$ donc $\ln(1+x) > \ln 1 = 0$. Avec $t = 1+x \neq 1$, l'inégalité $\ln t \leq t-1$ est stricte : $\ln(1+x) < x$.

Conclusion : $0 < \ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$.

2. Récurrence : $u_0 = 1 > 0$; si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = \ln(1 + u_n) > 0$ d'après la question 1. Donc $u_n > 0$ pour tout n , et par la question 1 : $u_{n+1} = \ln(1 + u_n) < u_n$.

Conclusion : (u_n) est strictement décroissante et strictement positive.

3. (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle converge (théorème de convergence monotone) vers un réel $\ell \geq 0$. La fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ est continue sur $[0; +\infty[$, donc en passant à la limite dans $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$: $\ell = \ln(1 + \ell)$. Si $\ell > 0$, la question 1 donnerait $\ln(1 + \ell) < \ell$: contradiction.

Conclusion : (u_n) converge vers $\ell = 0$.

4. On complète par `while u >= 0.01` : puis `u = log(1 + u)`. La boucle se termine car $u_n \rightarrow 0$.

Conclusion : `seuil()` renvoie 200 (avec $u_{199} \approx 0,01003 > 0,01 > u_{200} \approx 0,00998$).

D8.

1. Par définition de $\ln$, $g(x) = e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$, donc $g'(x) = 1$. D'autre part $g = \exp \circ \ln$ est dérivable et $g'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln x} = x \ln'(x)$. Ainsi $x \ln'(x) = 1$.

Conclusion : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

2. $(\ln(ax))' = a \ln'(ax) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$, donc $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$. Une fonction dérivable de dérivée nulle sur un intervalle est constante : $h(x) = h(1) = \ln a - \ln 1 = \ln a$ pour tout $x > 0$.

Conclusion : $\ln(ax) = \ln a + \ln x$ pour tous $a > 0$ et $x > 0$.

3. Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n \ln x$ (cours), donc $e^{n \ln x} = e^{\ln(x^n)} = x^n$. Pour $a = \frac{1}{2}$: $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$, donc $e^{\frac{1}{2} \ln x} = e^{\ln \sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

4. La fonction $x \mapsto a \ln x$ est dérivable de dérivée $\frac{a}{x}$, donc $(e^{a \ln x})' = \frac{a}{x} e^{a \ln x}$. Or $\frac{1}{x} = e^{-\ln x}$, donc $\frac{a}{x} e^{a \ln x} = a e^{(a-1) \ln x} = a x^{a-1}$.

Conclusion : $(x^a)' = a x^{a-1}$.

5. Pour $a > 0$: en 0^+ , $a \ln x \rightarrow -\infty$ donc $x^a = e^{a \ln x} \rightarrow 0$; en $+\infty$, $a \ln x \rightarrow +\infty$ donc $x^a \rightarrow +\infty$. Avec $X = x^a$, $\ln X = a \ln x$ et

$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{a} \times \frac{\ln X}{X}, \quad x^a \ln x = \frac{1}{a} X \ln X.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$ et $\frac{\ln X}{X} \rightarrow 0$; quand $x \rightarrow 0^+$, $X \rightarrow 0^+$ et $X \ln X \rightarrow 0$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0$.

6. $x^{3/2} = 8 \iff \frac{3}{2} \ln x = \ln 8 = 3 \ln 2 \iff \ln x = 2 \ln 2 = \ln 4 \iff x = 4$. Vérification : $4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 8$.

$$x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{3} \iff \sqrt{x} > 3 \iff x > 9.$$

Pour $f(x) = x^{\sqrt{2}}$: $f(1) = 1$ et $f'(1) = \sqrt{2} \times 1^{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$. La tangente a pour équation $y = \sqrt{2}(x - 1) + 1$.

Conclusion : $x = 4$; $x > 9$; tangente $y = \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}$.