

Corrigé : Fonction logarithme**Fiche Bases**

B1. 1. On décompose en produits de puissances de 2 et de 5, puis on applique $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ et $\ln(x^n) = n \ln x$.

- $\ln 20 = \ln(2^2 \times 5) = 2a + b$;
- $\ln 0,4 = \ln \frac{2}{5} = a - b$;
- $\ln 50 = \ln(2 \times 5^2) = a + 2b$;
- $\ln \sqrt{10} = \frac{1}{2} \ln 10 = \frac{a+b}{2}$;
- $\ln \frac{1}{8} = -\ln(2^3) = -3a$;
- $\ln \frac{25}{8} = \ln(5^2) - \ln(2^3) = 2b - 3a$.

2. $A = \ln(e^4) - \ln(e^{1/2}) = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$; $B = e^{\ln(2^3)} = 2^3 = 8$; $C = 3 \ln 2 - 2 \times 2 \ln 2 + 5 \ln 2 = 4 \ln 2$; $D = e^2 \times e^{\ln 3} = 3e^2$.

Conclusion : $A = \frac{7}{2}$, $B = 8$, $C = 4 \ln 2$, $D = 3e^2$.

B2.

- 1. Faux.** $\ln 5 - \ln 2 = \ln \frac{5}{2}$, et $\frac{5}{2} \neq 3$ donc $\ln \frac{5}{2} \neq \ln 3$ (la fonction $\ln$ est strictement croissante, donc injective).
- 2. Vrai.** L'équation est définie pour $x \neq 0$. On a $\ln(x^2) = 4 \iff x^2 = e^4 \iff x = e^2$ ou $x = -e^2$. Les deux nombres conviennent.
- 3. Vrai.** La fonction $\ln$ est strictement croissante et $\ln 1 = 0$: pour $0 < x \leq 1$, $\ln x \leq \ln 1 = 0$.
- 4. Faux.** La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ car $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Elle est négative sur $]0; 1[$, mais pas décroissante.
- 5. Faux.** Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

B3. Une expression $\ln u(x)$ existe si et seulement si $u(x) > 0$.

- 1.** $3 - 2x > 0 \iff x < \frac{3}{2}$. Donc $D_f =]-\infty; \frac{3}{2}[$.
- 2.** $x^2 - 9 > 0 \iff (x - 3)(x + 3) > 0$. Le trinôme est positif à l'extérieur des racines -3 et 3 . Donc $D_g =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.
- 3.** Il faut $x + 4 > 0$ et $5 - x > 0$, soit $x > -4$ et $x < 5$. Donc $D_h =]-4; 5[$.
- 4.** Il faut $x > 0$ et $\ln x - 2 \neq 0$. Or $\ln x = 2 \iff x = e^2$. Donc $D_k =]0; e^2[\cup]e^2; +\infty[$.

B4.

- 1. Définition :** $3x - 2 > 0$ et $x + 4 > 0$, soit $x > \frac{2}{3}$. Pour $x > \frac{2}{3}$: $\ln(3x - 2) = \ln(x + 4) \iff 3x - 2 = x + 4 \iff x = 3$. Or $3 > \frac{2}{3}$.

Conclusion : $S = \{3\}$.

- 2. Définition :** $2x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$. Pour $x > -\frac{1}{2}$: $\ln(2x + 1) = 2 \iff 2x + 1 = e^2 \iff x = \frac{e^2 - 1}{2} \approx 3,19$, qui est bien supérieur à $-\frac{1}{2}$.

Conclusion : $S = \left\{ \frac{e^2 - 1}{2} \right\}$.

- 3. Définition :** $x > 0$ et $x + 2 > 0$, soit $x > 0$. Pour $x > 0$: $\ln x + \ln(x + 2) = \ln(x(x + 2))$, donc

l'équation équivaut à $x(x+2) = 15$, soit $x^2 + 2x - 15 = 0$, c'est-à-dire $(x-3)(x+5) = 0$. Donc $x = 3$ ou $x = -5$. Seul 3 est strictement positif.

Conclusion : $S = \{3\}$.

4. *Définition :* $x > 0$. On pose $X = \ln x$: $X^2 - 5X + 6 = 0 \iff (X-2)(X-3) = 0 \iff X = 2$ ou $X = 3$. Donc $\ln x = 2$ ou $\ln x = 3$, soit $x = e^2$ ou $x = e^3$ (deux réels strictement positifs).

Conclusion : $S = \{e^2; e^3\}$.

B5. La fonction $\ln$ est strictement croissante : pour $A, B > 0$, $\ln A \leq \ln B \iff A \leq B$.

1. *Définition :* $2x-3 > 0 \iff x > \frac{3}{2}$. Comme $1 = \ln e$: $\ln(2x-3) \geq 1 \iff 2x-3 \geq e \iff x \geq \frac{3+e}{2}$.

Or $\frac{3+e}{2} \approx 2,86 > \frac{3}{2}$.

Conclusion : $S = \left[\frac{3+e}{2}; +\infty \right[$.

2. *Définition :* $x+2 > 0$ et $5-x > 0$, soit $-2 < x < 5$. Pour $x \in]-2; 5[$: $\ln(x+2) \leq \ln(5-x) \iff x+2 \leq 5-x \iff x \leq \frac{3}{2}$.

Conclusion : $S = \left] -2; \frac{3}{2} \right]$.

3. *Définition :* $3x-1 > 0 \iff x > \frac{1}{3}$. Comme $-1 = \ln(e^{-1})$: $\ln(3x-1) > -1 \iff 3x-1 > e^{-1} \iff x > \frac{1+e^{-1}}{3}$. Or $\frac{1+e^{-1}}{3} \approx 0,456 > \frac{1}{3}$.

Conclusion : $S = \left] \frac{1+e^{-1}}{3}; +\infty \right[$.

B6.

1. $e^{2x} = 7 \iff 2x = \ln 7 \iff x = \frac{\ln 7}{2}$. $S = \left\{ \frac{\ln 7}{2} \right\}$.

2. $2e^{-x} + 1 = 5 \iff e^{-x} = 2 \iff -x = \ln 2 \iff x = -\ln 2$. $S = \{-\ln 2\}$.

3. Avec $X = e^x > 0$: $X^2 - 4X + 3 = 0 \iff (X-1)(X-3) = 0 \iff X = 1$ ou $X = 3$. Donc $e^x = 1$ ou $e^x = 3$, soit $x = 0$ ou $x = \ln 3$. $S = \{0; \ln 3\}$.

4. La fonction $\ln$ est strictement croissante : $e^{3x-2} < 4 \iff 3x-2 < \ln 4 \iff x < \frac{2+\ln 4}{3} = \frac{2+2\ln 2}{3}$. $S = \left] -\infty; \frac{2+2\ln 2}{3} \right[$.

B7.

1. On lit $\ln 3 \approx 1,1$. La courbe atteint l'ordonnée 1 pour $x \approx 2,7$ et l'ordonnée -1 pour $x \approx 0,4$ (valeurs exactes : e et e^{-1}).

2. $\ln 1 = 0$ et $\ln'(1) = 1$. Donc $T : y = 0 + 1 \times (x-1)$.

Conclusion : $T : y = x-1$.

3. $\ln e = 1$ et $\ln'(e) = \frac{1}{e}$. Donc $T' : y = 1 + \frac{1}{e}(x-e) = \frac{x}{e}$.

Conclusion : $T' : y = \frac{x}{e}$. Cette tangente passe par l'origine $O(0; 0)$.

4. La courbe $\mathcal{C}$ est située en dessous de T . Pour tout $x > 0$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: la fonction $\ln$ est concave, donc sa courbe est située sous ses tangentes.

Conclusion : pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x-1$ (égalité seulement en $x = 1$).

5. $\ln(e^2) = 2$, donc $Q(e^2; 2)$ vérifie $y = \ln x$.

Conclusion : $Q \in \mathcal{C}$. Les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont réciproques : $(a; b)$ est sur la courbe de $\exp$ si et seulement si $(b; a)$ est sur $\mathcal{C}$. Les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (symétrie orthogonale d'axe cette droite).

B8.

1. $x > -\frac{5}{2} \Rightarrow 2x+5 > 0$, et $f'(x) = \frac{2}{2x+5}$.

2. $x^2 + 4 > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$.
3. Produit : $h'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.
4. Quotient : $k'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$.
5. $1 + e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $m'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
6. La fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$ est croissante sur $[0; +\infty[$ (carré) et à valeurs strictement positives, et $\ln$ est croissante sur $]0; +\infty[$. Donc $\ln \circ u$ a le même sens de variation que u .
Conclusion : $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est croissante sur $[0; +\infty[$ (cohérent avec la dérivée $\frac{2x}{x^2 + 1} \geq 0$).

B9.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3 - \ln x) = +\infty$.
2. Croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc la limite vaut 0.
3. Croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, donc la limite vaut 0.
4. $x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$. Comme $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ (croissances comparées), le facteur entre parenthèses tend vers 1, et $x \rightarrow +\infty$. Par produit, la limite vaut $+\infty$.
5. $\frac{3x+1}{x} = 3 + \frac{1}{x} \rightarrow 3$ et $\ln$ est continue en 3 : par composition, la limite vaut $\ln 3$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc par inverse, la limite vaut 0 (par valeurs négatives).

B10.

1. $C_n = 1\,500 \times 1,03^n$. Alors $C_n \geq 3\,000 \iff 1,03^n \geq 2 \iff n \ln 1,03 \geq \ln 2$. Comme $1,03 > 1$, $\ln 1,03 > 0$: $n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,03} \approx 23,45$.
Conclusion : le plus petit entier est $n = 24$.
2. La boucle augmente n d'une unité et multiplie c par 1,03 tant que $c < 3\,000$. Elle s'arrête au premier n tel que $1\,500 \times 1,03^n \geq 3\,000$.
Conclusion : la fonction renvoie 24.
3. $M_n < 5 \iff 0,9^n < \frac{1}{16} \iff n \ln 0,9 < -\ln 16$. Comme $0,9 < 1$, $\ln 0,9 < 0$: on divise en changeant le sens de l'inégalité, d'où $n > \frac{-\ln 16}{\ln 0,9} \approx 26,3$.
Conclusion : le plus petit entier est $n = 27$. Programme adapté : initialiser `c = 80`, remplacer la condition par `while c >= 5` et la mise à jour par `c = c * 0.9`; la fonction renvoie 27.