

Fiche 4 : logarithme, suites et algorithmique

Six exercices qui relient le logarithme aux suites :

- seuils avec $\ln$ et Python ;
- suite définie par $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$;
- limites de la forme $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ et intérêts composés ;
- télescopage de produits ;
- limites avec $\ln$;
- sommes harmoniques.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- théorèmes nommés ;
- hypothèses vérifiées ;
- inégalité retournée quand il le faut ;
- conclusion.

Les réflexes à avoir en tête

- **Seuil** : $q^n \geq A \iff n \ln q \geq \ln A$; on divise par $\ln q$ en retournant l'inégalité si $q < 1$.
- **Inégalité** : $\ln x \leq x - 1$ pour montrer qu'une suite est décroissante.
- **Forme** $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$: on passe en exponentielle, $n \ln \left(1 + \frac{a}{n}\right) \rightarrow a$.
- **Somme de logarithmes** : regroupe en un $\ln$ d'un produit, cherche un télescopage.

Les pièges classiques

- Oublier de **retourner l'inégalité** quand on divise par $\ln q < 0$.
- Donner un rang **non entier** : le plus petit entier n s'obtient en arrondissant **au-dessus**.
- Passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ sans avoir prouvé la **convergence** et la **continuité**.
- Écrire $\ln(a) \times \ln(b)$ à la place de $\ln(ab)$ dans un télescopage.

Un seuil non entier, c'est comme annoncer qu'un train arrive à 14 h 12 min et 3 dixièmes : le rang d'une suite est toujours un entier.

Exercice 1 (★★) : seuils avec ln et Python

1. Un capital de 2 000 € est placé à 3 % d'intérêts composés par an. Déterminer le plus petit nombre d'années après lequel il dépasse 3 000 €.
2. Un matériel de 10 000 € perd 15 % de sa valeur chaque année. Déterminer à partir de quelle année sa valeur est inférieure à 1 000 €.
3. Écrire une fonction Python qui renvoie ce rang pour la question 1, puis une version qui utilise le logarithme.

Correction de l'exercice 1**Question 1**

Le capital au bout de n années est $u_n = 2000 \times 1,03^n$. On cherche le plus petit entier n tel que $2000 \times 1,03^n \geq 3000$, soit $1,03^n \geq 1,5$. Comme $\ln$ est strictement croissante : $n \ln 1,03 \geq \ln 1,5$. Comme $1,03 > 1$, $\ln 1,03 > 0$:

$$n \geq \frac{\ln 1,5}{\ln 1,03} \approx 13,72$$

Le plus petit entier est $n = 14$.

Contrôle :

$$2000 \times 1,03^{13} \approx 2937 < 3000$$

$$2000 \times 1,03^{14} \approx 3025 \geq 3000$$

Question 2

La valeur au bout de n années est $v_n = 10000 \times 0,85^n$. On cherche $10000 \times 0,85^n < 1000$, soit $0,85^n < 0,1$. Donc $n \ln 0,85 < \ln 0,1$. Comme $0,85 < 1$, $\ln 0,85 < 0$: on divise en retournant l'inégalité.

$$n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,85} \approx 14,17$$

Le plus petit entier est $n = 15$.

Question 3

Version avec boucle :

```
def rang():
    n = 0
    u = 2000
    while u < 3000:
        u = 1.03*u
        n = n + 1
    return n
```

Version avec le logarithme :

```
from math import log, ceil

def rang():
    return ceil(log(1.5)/log(1.03))
```

La fonction `ceil` arrondit à l'entier supérieur : **13,72** devient **14**.

Les deux versions renvoient 14.

La boucle se termine car $u_n \rightarrow +\infty$ ($1,03 > 1$).

Exercice 2 (★★★) : la suite $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$

On définit $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. Soit $f(x) = \ln(1 + x)$.

1. Montrer que f est croissante sur $] -1 ; +\infty[$, puis que $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

Correction de l'exercice 2

Question 1

f est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0$.

f est strictement croissante.

On a $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln 2 \leq 1$ (car $\ln x \leq x - 1$ donne $\ln 2 \leq 1$).

Soit $P(n)$: « $0 < u_n \leq 1$ ».

Initialisation.

$u_0 = 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité.

Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $0 < u_k \leq 1$. Comme f est croissante, $f(0) < f(u_k) \leq f(1)$. Soit $0 < u_{k+1} \leq \ln 2 \leq 1$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion.

$0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 2

Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = \ln(1 + u_n) - u_n$. Comme $\ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$, avec $x = 1 + u_n$: $\ln(1 + u_n) \leq u_n$. Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

(u_n) est décroissante.

Question 3

(u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone :

elle converge vers un réel $\ell \in [0; 1]$.

La fonction f est continue sur $[0; 1]$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n) : \ell = \ln(1 + \ell)$.

Soit $g(x) = x - \ln(1 + x)$ sur $[0; +\infty[$. $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$ pour $x > 0$. g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, avec $g(0) = 0$. Donc $g(x) > 0$ pour $x > 0$.

L'équation $g(\ell) = 0$ avec $\ell \geq 0$ impose $\ell = 0$.

Donc $\lim u_n = 0$.

Exercice 3 (★★★) : les limites $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ et les intérêts composés

1. Déterminer $\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ et $\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$.

2. On place 1 000 € au taux annuel de 5 %, les intérêts étant calculés n fois par an au taux $\frac{0,05}{n}$.

Le capital au bout d'un an est $C_n = 1\,000 \left(1 + \frac{0,05}{n}\right)^n$.

Déterminer $\lim C_n$ et interpréter.

Correction de l'exercice 3

Question 1

Pour n assez grand, $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)}$. Et $n \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right) = 3 \times \frac{\ln(1+h)}{h}$ avec $h = \frac{3}{n} \rightarrow 0$. Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$, $n \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right) \rightarrow 3$. Par composition avec l'exponentielle continue :

$$\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = e^3$$

De même $n \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) = -2 \times \frac{\ln(1+h)}{h}$ avec $h = -\frac{2}{n} \rightarrow 0$. Donc $n \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) \rightarrow -2$.

$$\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$$

Question 2

$$C_n = 1\,000 e^{n \ln(1 + \frac{0,05}{n})} \cdot n \ln\left(1 + \frac{0,05}{n}\right) = 0,05 \times \frac{\ln(1+h)}{h} \text{ avec } h = \frac{0,05}{n} \rightarrow 0. \text{ Donc } n \ln\left(1 + \frac{0,05}{n}\right) \rightarrow 0,05.$$

$$\lim C_n = 1\,000 e^{0,05} \approx 1\,051,27 \text{ €}$$

Interprétation : même avec des intérêts calculés de plus en plus souvent, le capital final ne dépasse pas environ 1 051,27 €.

Il tend vers une limite (intérêts composés « continus »).

Pour comparaison, $n = 1$ donne 1 050 € et $n = 12$ donne environ 1 051,16 €.

Exercice 4 (★★★) : un produit qui se télescope

Pour $n \geq 2$, on pose $S_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Montrer que $S_n = \ln \frac{n+1}{2n}$, puis déterminer $\lim S_n$.

Correction de l'exercice 4

Décomposition

Pour $k \geq 2$: $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$, et $1 - \frac{1}{k^2} > 0$. Donc :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2 \ln k$$

Sommation

En sommant de $k = 2$ à n :

$$\sum \ln(k-1) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln(n-1)$$

$$\sum \ln(k+1) = \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln(n+1)$$

$$\sum 2 \ln k = 2(\ln 2 + \dots + \ln n)$$

Après simplification (télescopage) : $S_n = \ln 1 - \ln 2 + \ln(n+1) - \ln n$.

$$S_n = \ln \frac{n+1}{2n}$$

Vérification pour $n = 2$: $S_2 = \ln \frac{3}{4}$ et $\ln \frac{2+1}{2 \times 2} = \ln \frac{3}{4}$

Limite

Comme $\frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ et que $\ln$ est continue en $\frac{1}{2}$:

$$\lim S_n = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

Exercice 5 (★★) : limites de suites avec $\ln$

Déterminer la limite de chaque suite :

1. $u_n = \frac{\ln n}{n}$

2. $v_n = \ln(n^2 + 1) - 2 \ln n$

3. $w_n = n - \ln n$

4. $t_n = \frac{(\ln n)^2}{n}$

Correction de l'exercice 5

Question 1

Par croissances comparées, $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim u_n = 0$$

Question 2

Pour $n \geq 1$: $v_n = \ln(n^2 + 1) - \ln(n^2) = \ln \frac{n^2 + 1}{n^2} = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$. Comme $1 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 1$ et que $\ln$ est continue en 1 :

$$\lim v_n = 0$$

Question 3

Forme « $+\infty - \infty$ ». $w_n = n \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)$, avec $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$. Donc $1 - \frac{\ln n}{n} \rightarrow 1$ et, par produit :

$$\lim w_n = +\infty$$

Question 4

$t_n = \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^2$. D'après l'exercice 2 de la fiche 2, $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$. Par composition avec la fonction carré :

$$\lim t_n = 0$$

Exercice 6 (★★★) : sommes harmoniques et seuils

On note $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. On admet que $H_n \geq \ln(n+1)$ (fiche 2, exercice 8).

1. Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $H_n \geq 5$.
2. Déterminer le plus petit entier n tel que $\ln n \geq 10$.
3. Justifier qu'à partir du rang 148, on a $H_n \geq 5$.

Correction de l'exercice 6

Question 1

```
def rang():
    n = 0
    s = 0
    while s < 5:
        n = n + 1
        s = s + 1/n
    return n
```

La boucle se termine car $H_n \rightarrow +\infty$. À l'exécution, $H_{82} \approx 4,990 < 5$ et $H_{83} \approx 5,002 \geq 5$.

La fonction renvoie 83.

Question 2

$\ln n \geq 10 \iff n \geq e^{10}$ ($\ln$ est strictement croissante). Comme $e^{10} \approx 22\,026,47$:

le plus petit entier est $n = 22\,027$.

Question 3

On a $H_n \geq \ln(n+1)$. Or $\ln(n+1) \geq 5 \iff n+1 \geq e^5 \approx 148,41 \iff n \geq 147,41$. Donc, pour tout $n \geq 148$:

$$H_n \geq \ln(n+1) \geq 5$$

Remarque : cette borne (148) est loin du rang exact (83). L'inégalité $H_n \geq \ln(n+1)$ est valable mais pas très précise.

Exercice 7 (★★★) : la méthode de Briggs

Avant les calculatrices, Briggs calculait $\ln x$ avec des racines carrées successives. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $h = \frac{\ln x}{2^n}$.

1. Montrer que $x^{1/2^n} = e^h$.
2. En utilisant $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, justifier que $2^n (x^{1/2^n} - 1)$ tend vers $\ln x$ quand $n \rightarrow +\infty$.
3. Écrire un programme qui calcule $2^n (2^{1/2^n} - 1)$ pour $n = 10$ et comparer à $\ln 2$.

Correction de l'exercice 7

Question 1

$$x^{1/2^n} = e^{\frac{\ln x}{2^n}} = e^h.$$

Question 2

$$2^n (x^{1/2^n} - 1) = 2^n (e^h - 1) = \ln x \times \frac{e^h - 1}{h} \text{ car } 2^n = \frac{\ln x}{h} \text{ (pour } x \neq 1 \text{)}.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $h \rightarrow 0$ donc $\frac{e^h - 1}{h} \rightarrow 1$ et la quantité tend vers $\ln x$.

Question 3

```
from math import log
n = 10
print(2**n * (2**(1 / 2**n) - 1), log(2))
```

On obtient 0,69338... contre $\ln 2 = 0,69314...$: trois décimales exactes seulement.

Ce qui peut tomber au bac

- Un **seuil** avec $\ln$ et l'inégalité retournée quand $q < 1$ (exercice 1).
- Une **suite** $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $\ln$, dont la monotonie utilise $\ln x \leq x - 1$ (exercice 2).
- La **limite** de $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ et sa version « intérêts composés » (exercice 3).
- Un **télescopage** de logarithmes (exercice 4).
- Des **limites de suites** avec $\ln$ et une question de **programmation** (exercices 5 et 6).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quel est le plus petit entier n tel que $0,9^n < 0,5$?

- A. 6
- B. 5
- C. 8
- D. 7 (**bonne réponse**)

Justification : $n > \frac{\ln 0,5}{\ln 0,9} \approx 6,58$ (le sens change car $\ln 0,9 < 0$). $0,9^6 \approx 0,53$ et $0,9^7 \approx 0,48$.

2. Quel est le plus petit entier n tel que $2^n \geq 1\,000$?

- A. 100
- B. 11
- C. 9
- D. 10 (**bonne réponse**)

Justification : $2^9 = 512 < 1\,000$ et $2^{10} = 1\,024 \geq 1\,000$.

3. Que vaut $\ln(a^n)$ pour $a > 0$?

- A. $\ln a + n$
- B. $\ln(na)$
- C. $n \ln a$ (**bonne réponse**)
- D. $(\ln a)^n$

Justification : Propriété de la puissance : le logarithme transforme une puissance en produit.

4. Quel est le plus petit entier n tel que $1,05^n > 2$?

- A. 15 (**bonne réponse**)
- B. 14
- C. 20
- D. 16

Justification : $n > \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2$. $1,05^{14} \approx 1,98$ et $1,05^{15} \approx 2,08$.

5. En résolvant $0,9^n < 0,5$ avec le logarithme, on écrit $n \ln 0,9 < \ln 0,5$. En divisant par $\ln 0,9$, on obtient :

- A. $n = \frac{\ln 0,5}{\ln 0,9}$
- B. $n > \ln 0,4$
- C. $n > \frac{\ln 0,5}{\ln 0,9}$, car $\ln 0,9 < 0$ (**bonne réponse**)
- D. $n < \frac{\ln 0,5}{\ln 0,9}$, car on divise

Justification : Diviser par un nombre négatif renverse le sens de l'inégalité.

6. Dans l'exercice 1, un capital de 2 000 € placé à 3 % d'intérêts composés dépasse 3 000 € au bout de combien d'années ?

- A. 15 ans
- B. 14 ans (**bonne réponse**)
- C. 3 ans
- D. 10 ans

Justification : On résout $2\,000 \times 1,03^n \geq 3\,000$, soit $n \geq \frac{\ln 1,5}{\ln 1,03} \approx 13,7$: le plus petit entier est 14.

7. Dans l'exercice 2, avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$, quelle est la limite de (u_n) ?

- A. 1
- B. $+\infty$
- C. 0 (**bonne réponse**)
- D. $e - 1$

Justification : (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers ℓ tel que $\ell = \ln(1 + \ell)$, dont la seule solution est $\ell = 0$.

8. Dans l'exercice 3, en plaçant 1 000 € à 5 % avec des intérêts calculés n fois par an, quelle est la limite du capital C_n quand $n \rightarrow +\infty$?

- A. 1 050 €
- B. $+\infty$
- C. $1\,000 e^{0,05} \approx 1\,051,27$ € (**bonne réponse**)
- D. 1 000 €

Justification : $C_n = 1\,000 \left(1 + \frac{0,05}{n}\right)^n \rightarrow 1\,000 e^{0,05}$ (limite du type $(1 + \frac{a}{n})^n \rightarrow e^a$).

9. Dans l'exercice 4, que vaut $S_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ après simplification ?

- A. $\ln \frac{1}{n}$
- B. $\ln \frac{n+1}{2n}$ (**bonne réponse**)
- C. $\ln \frac{n}{2}$
- D. $-\ln n$

Justification : Le produit télescopique $\prod \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ se simplifie en $\frac{n+1}{2n}$.

10. Dans l'exercice 6, on admet que $H_n \geq \ln(n+1)$. Quel est le plus petit entier n tel que $\ln n \geq 10$?

- A. $n = e^{10}$ arrondi à 10
- B. $n = 22\,027$ (**bonne réponse**)
- C. $n = 10$
- D. $n = 1\,000$

Justification : $\ln n \geq 10 \iff n \geq e^{10} \approx 22\,026,5$: le plus petit entier est 22 027.