

Fiche 3 : études de fonctions avec $\ln$

Huit exercices pour traiter toutes les études de fonctions avec $\ln$ que l'on rencontre au bac :

- carré du logarithme ;
- fonction avec $\ln$ en facteur ;
- logarithme d'une expression paire ou impaire ;
- quotient ;
- fonctions avec puissances de x ;
- une application de la concavité de $\ln$.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- domaine ;
- limites justifiées ;
- dérivée factorisée ;
- signe justifié ;
- tableau complet ;
- convexité et points d'inflexion avec leurs deux coordonnées.

Le plan d'une étude avec $\ln$

1. Domaine de définition (chaque expression dans $\ln$ est strictement positive).
2. Limites aux bornes : croissances comparées, $\ln x \rightarrow -\infty$ en 0^+ .
3. Dérivée avec $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, factorisée ; signe justifié ($x > 0$, $x^2 > 0$, $\ln x$ du signe de $x - 1$...).
4. Tableau de variations avec limites et valeurs (souvent en 1 , en e , en $\frac{1}{e}$).
5. Convexité, tangentes, équation selon les questions.

Les pièges classiques

- Oublier le **domaine** ($]0; +\infty[$ n'est pas toujours celui de la fonction).
- Calculer une limite en 0^+ avec un $\ln$ sans citer les **croissances comparées**.
- Confondre le signe de $\ln x$ (négatif avant 1 , positif après) avec celui de $x - 1$ (même signe, mais ce ne sont pas les mêmes fonctions).
- Un tableau **sans limites**.

Avec $\ln$, le nombre 1 est le point de bascule : avant lui, tout est négatif ; après, tout est positif. Il ne faut pas le rater.

Exercice 1 (★★) : le carré du logarithme

Soit $f(x) = (\ln x)^2$ sur $]0; +\infty[$. Étudier f : limites, variations, convexité et point d'inflexion.

Exercice 2 (★★) : la fonction $x(\ln x - 1)$

Soit $f(x) = x(\ln x - 1)$ sur $]0; +\infty[$. Étudier f : limites, variations, minimum, zéros, convexité.

Exercice 3 (★★★) : $\ln(x^2 + 1)$

Soit $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est paire, étudier ses variations, sa convexité, ses points d'inflexion, puis montrer que $f(x) \leq x^2$.

Exercice 4 (★★★★) : $\ln \frac{1+x}{1-x}$

Soit $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D et montrer que f est impaire.
2. Déterminer les limites aux bornes de D et les asymptotes.
3. Étudier les variations, la convexité, et le point d'inflexion. Déterminer la tangente en ce point.
4. Résoudre $f(x) = k$ pour tout réel k .

Exercice 5 (★★★★) : la fonction $\frac{1 + \ln x}{x}$

Soit $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Étudier f : limites, asymptotes, variations, signe, et tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

Exercice 6 (★★) : $x^2 - 2 \ln x$

Soit $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$. Étudier f et en déduire que $x^2 > 2 \ln x$ pour tout $x > 0$.

Exercice 7 (★★★) : la fonction $x^2 \ln x$

Soit $f(x) = x^2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$. Étudier f : limites, variations, minimum, convexité et point d'inflexion.

Exercice 8 (★★★) : la concavité de $\ln$ et l'inégalité arithmético-géométrique

1. Montrer que $\ln$ est concave sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire que, pour tous $a, b > 0$, $\frac{\ln a + \ln b}{2} \leq \ln \frac{a+b}{2}$.
3. En déduire que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **études complètes** avec $\ln$ et puissances de x (exercices 1, 2, 5, 6, 7).
- Une fonction **paire ou impaire** avec $\ln$ d'une expression (exercices 3 et 4).
- Un **minimum qui donne une inégalité** (exercices 3 et 6).
- Une **équation** $f(x) = k$ résolue par le corollaire du TVI, et explicitement (exercice 4).
- Une **application de la concavité** (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Sur $]0; +\infty[$, la fonction $f(x) = x - \ln x$ admet un minimum égal à :
 - A. 1, atteint en $x = e$
 - B. e , atteint en $x = e$
 - C. 0, atteint en $x = 1$
 - D. 1, atteint en $x = 1$
2. La fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ admet un maximum en :
 - A. $x = e$, de valeur $\frac{1}{e}$
 - B. $x = 1$, de valeur 0
 - C. $x = e$, de valeur e
 - D. $x = 1$, de valeur 1
3. L'inégalité $\ln x \leq x - 1$ (pour $x > 0$) vient de :
 - A. la parité de $\ln$
 - B. la limite de $\ln$ en $+\infty$

- C. la convexité de $\ln$
- D. la concavité de $\ln$: la courbe est sous sa tangente en 1
4. La fonction logarithme népérien est :
- A. strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- B. décroissante sur $]0; +\infty[$
- C. constante
- D. croissante sur $\mathbb{R}$
5. Quelle est la dérivée seconde de $\ln x$?
- A. $-\frac{1}{x^2}$
- B. $\frac{1}{x^2}$
- C. $-\frac{1}{x}$
- D. $\frac{1}{x}$
6. Dans l'exercice 1, avec $f(x) = (\ln x)^2$, quel est le point d'inflexion de sa courbe ?
- A. $(e; 1)$
- B. $(1; 0)$
- C. $(1; 1)$
- D. $(e; e)$
7. Dans l'exercice 2, avec $f(x) = x(\ln x - 1)$, en quel point la courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
- A. en $x = e$
- B. elle ne le coupe jamais
- C. en $x = 1$
- D. en $x = 0$
8. Dans l'exercice 3, avec $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, quelle inégalité prouve-t-on pour tout réel x ?
- A. $f(x) \geq x^2$
- B. $f(x) = x^2$
- C. $f(x) \leq x$
- D. $f(x) \leq x^2$
9. Dans l'exercice 4, avec $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, quel est le point d'inflexion de sa courbe ?
- A. $(-1; 0)$
- B. il n'y en a pas
- C. $O(0; 0)$
- D. $(1; 0)$

10. Dans l'exercice 8, la concavité de $\ln$ permet de démontrer l'inégalité :

A. $a + b \leq 2\sqrt{ab}$ implique $a = b$

B. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ pour $a, b > 0$

C. $\sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2}$

D. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$