

Fiche 3 : études de fonctions avec $\ln$

Huit exercices pour traiter toutes les études de fonctions avec $\ln$ que l'on rencontre au bac :

- carré du logarithme ;
- fonction avec $\ln$ en facteur ;
- logarithme d'une expression paire ou impaire ;
- quotient ;
- fonctions avec puissances de x ;
- une application de la concavité de $\ln$.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- domaine ;
- limites justifiées ;
- dérivée factorisée ;
- signe justifié ;
- tableau complet ;
- convexité et points d'inflexion avec leurs deux coordonnées.

Le plan d'une étude avec $\ln$

1. Domaine de définition (chaque expression dans $\ln$ est strictement positive).
2. Limites aux bornes : croissances comparées, $\ln x \rightarrow -\infty$ en 0^+ .
3. Dérivée avec $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, factorisée ; signe justifié ($x > 0$, $x^2 > 0$, $\ln x$ du signe de $x - 1$...).
4. Tableau de variations avec limites et valeurs (souvent en 1 , en e , en $\frac{1}{e}$).
5. Convexité, tangentes, équation selon les questions.

Les pièges classiques

- Oublier le **domaine** ($]0; +\infty[$ n'est pas toujours celui de la fonction).
- Calculer une limite en 0^+ avec un $\ln$ sans citer les **croissances comparées**.
- Confondre le signe de $\ln x$ (négatif avant 1 , positif après) avec celui de $x - 1$ (même signe, mais ce ne sont pas les mêmes fonctions).
- Un tableau **sans limites**.

Avec $\ln$, le nombre 1 est le point de bascule : avant lui, tout est négatif ; après, tout est positif. Il ne faut pas le rater.

Exercice 1 (★★) : le carré du logarithme

Soit $f(x) = (\ln x)^2$ sur $]0; +\infty[$. Étudier f : limites, variations, convexité et point d'inflexion.

Correction de l'exercice 1**Limites**

En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$, donc $(\ln x)^2 \rightarrow +\infty$. En $+\infty$: $\ln x \rightarrow +\infty$, donc $(\ln x)^2 \rightarrow +\infty$.

$\lim f = +\infty$ aux deux bornes (par composition avec la fonction carré).

Variations

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$. Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln x$: négatif sur $]0; 1[$, positif sur $]1; +\infty[$.

f est strictement décroissante sur $]0; 1]$ (de $+\infty$ à $f(1) = 0$) et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Minimum : $f(1) = 0$.

Convexité

$$f''(x) = \frac{2 \left[\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1 \right]}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

Du signe de $1 - \ln x$: positif pour $x < e$.

f est convexe sur $]0; e]$ et concave sur $[e; +\infty[$.

Point d'inflexion : $(e; f(e)) = (e; 1)$

Exercice 2 (★★) : la fonction $x(\ln x - 1)$

Soit $f(x) = x(\ln x - 1)$ sur $]0; +\infty[$. Étudier f : limites, variations, minimum, zéros, convexité.

Correction de l'exercice 2**Limites**

En 0^+ : $f(x) = x \ln x - x$. Par croissances comparées, $x \ln x \rightarrow 0$, et $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = 0$$

En $+\infty$: $\ln x - 1 \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow +\infty$, donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

Variations

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = (\ln x - 1) + x \times \frac{1}{x}$.

$$f'(x) = \ln x$$

Donc $f' < 0$ sur $]0; 1[$ et $f' > 0$ sur $]1; +\infty[$.

f est strictement décroissante sur $]0; 1]$ (de 0 à $f(1) = -1$) et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Minimum : $f(1) = -1$.

Zéros

$$f(x) = 0 \iff x(\ln x - 1) = 0 \iff \ln x = 1 \text{ (car } x > 0) \iff x = e.$$

La courbe coupe l'axe des abscisses uniquement en e .

Et $f(x) < 0$ sur $]0; e[$, $f(x) > 0$ sur $]e; +\infty[$.

Convexité

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

f est convexe sur $]0; +\infty[$.

Exercice 3 (★★★) : $\ln(x^2 + 1)$

Soit $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est paire, étudier ses variations, sa convexité, ses points d'inflexion, puis montrer que $f(x) \leq x^2$.

Correction de l'exercice 3

Domaine et parité

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$: f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout x , $f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) = f(x)$.

f est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Limites

Quand $x \rightarrow \pm\infty$, $x^2 + 1 \rightarrow +\infty$ et $\ln$ est de limite $+\infty$ en $+\infty$. Par composition :

$\lim f = +\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$

Variations

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$. Comme $x^2 + 1 > 0$, $f'(x)$ est du signe de x .

f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec un minimum $f(0) = \ln 1 = 0$.

Convexité

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}, \text{ du signe de } 1 - x^2.$$

f est convexe sur $[-1 ; 1]$ et concave sur $] -\infty ; -1]$ et sur $[1 ; +\infty[$.

La courbe a deux points d'inflexion : $(-1 ; \ln 2)$ et $(1 ; \ln 2)$.

Inégalité

On sait que $\ln u \leq u - 1$ pour $u > 0$. Avec $u = x^2 + 1 > 0$: $\ln(x^2 + 1) \leq x^2$.

Donc $f(x) \leq x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (★★★) : $\ln \frac{1+x}{1-x}$

Soit $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D et montrer que f est impaire.
2. Déterminer les limites aux bornes de D et les asymptotes.
3. Étudier les variations, la convexité, et le point d'inflexion. Déterminer la tangente en ce point.
4. Résoudre $f(x) = k$ pour tout réel k .

Correction de l'exercice 4

Question 1

$f(x)$ existe si et seulement si $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Par un tableau de signes, cela équivaut à $-1 < x < 1$.

$D =] -1 ; 1[$, symétrique par rapport à 0.

Pour tout $x \in D$:

$$f(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -f(x)$$

f est impaire.

Question 2

En $1^- : 1+x \rightarrow 2$ et $1-x \rightarrow 0^+$, donc $\frac{1+x}{1-x} \rightarrow +\infty$. Par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f = +\infty$$

En $-1^+ : 1+x \rightarrow 0^+$ et $1-x \rightarrow 2$, donc le quotient tend vers 0^+ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f = -\infty$$

Les droites $x = 1$ et $x = -1$ sont asymptotes verticales.

Question 3

Pour $x \in D$, $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, dérivable, et :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} > 0$$

car $1-x^2 > 0$ sur D .

f est strictement croissante sur D , de $-\infty$ à $+\infty$.

Puis $f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$, du signe de x .

f est concave sur $] -1; 0]$ et convexe sur $[0; 1[$.

Le point d'inflexion est $O(0; 0)$ (également centre de symétrie, f étant impaire).

Comme $f'(0) = 2$:

la tangente en O a pour équation $y = 2x$.

Question 4

f est continue et strictement croissante sur $] -1; 1[$, de $-\infty$ à $+\infty$. D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution pour tout k .

Explicitement :

$$\frac{1+x}{1-x} = e^k \iff 1+x = e^k(1-x) \iff x(1+e^k) = e^k - 1$$

La solution est $x = \frac{e^k - 1}{e^k + 1}$.

Exercice 5 (★★★) : la fonction $\frac{1 + \ln x}{x}$

Soit $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Étudier f : limites, asymptotes, variations, signe, et tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 5

Limites

En 0^+ : $1 + \ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty \text{ (asymptote verticale } x = 0)$$

En $+\infty$: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$, avec $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ (croissances comparées).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0 \text{ (asymptote horizontale } y = 0)$$

Variations

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient. $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x)}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$$

Du signe de $-\ln x$: positif sur $]0; 1[$, négatif sur $]1; +\infty[$.

f est strictement croissante sur $]0; 1]$ (de $-\infty$ à $f(1) = 1$) et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$ (de 1 à 0).

Maximum : $f(1) = 1$.

Signe

$$f(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff x = \frac{1}{e}.$$

$$f(x) < 0 \text{ sur } \left]0; \frac{1}{e}\right[\text{ et } f(x) > 0 \text{ sur } \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[.$$

Tangente en $\frac{1}{e}$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = 0 \text{ et } f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-\ln \frac{1}{e}}{\left(\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{e^2}} = e^2. \text{ La tangente a pour équation } y = e^2 \left(x - \frac{1}{e}\right).$$

$$y = e^2 x - e$$

Exercice 6 (★★) : $x^2 - 2 \ln x$

Soit $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$. Étudier f et en déduire que $x^2 > 2 \ln x$ pour tout $x > 0$.

Correction de l'exercice 6

Limites

En 0^+ : $x^2 \rightarrow 0$ et $-2 \ln x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty$$

En $+\infty$: $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{2 \ln x}{x^2}\right)$. Avec $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc $1 - \frac{2 \ln x}{x^2} \rightarrow 1$. Par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

Variations

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$. Pour $x > 0$, $x+1 > 0$ et $x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$.

f est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Minimum : $f(1) = 1 - 0 = 1$.

Conséquence

Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 1 > 0$.

$x^2 - 2 \ln x > 0$, c'est-à-dire $x^2 > 2 \ln x$.

Exercice 7 (★★★) : la fonction $x^2 \ln x$

Soit $f(x) = x^2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$. Étudier f : limites, variations, minimum, convexité et point d'inflexion.

Correction de l'exercice 7

Limites

En 0^+ : par croissances comparées ($n = 2$) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = 0$$

En $+\infty$: $x^2 \rightarrow +\infty$ et $\ln x \rightarrow +\infty$, donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

Variations

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit. $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$.

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1)$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 \ln x + 1$. Il est positif si $\ln x > -\frac{1}{2}$, soit $x > e^{-1/2}$.

f est strictement décroissante sur $]0; e^{-1/2}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1/2}; +\infty[$.

Minimum : $f(e^{-1/2}) = e^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$.

Le minimum est $-\frac{1}{2e}$.

Convexité

$$f''(x) = 2 \ln x + 2 + 1$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 3$$

Positif si $\ln x > -\frac{3}{2}$, soit $x > e^{-3/2}$.

f est concave sur $]0; e^{-3/2}]$ et convexe sur $[e^{-3/2}; +\infty[$.

Point d'inflexion : $\left(e^{-3/2}; -\frac{3}{2e^3}\right)$

Exercice 8 (★★★) : la concavité de $\ln$ et l'inégalité arithmético-géométrique

1. Montrer que $\ln$ est concave sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire que, pour tous $a, b > 0$, $\frac{\ln a + \ln b}{2} \leq \ln \frac{a+b}{2}$.
3. En déduire que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Correction de l'exercice 8

Question 1

$\ln$ est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Donc $\ln$ est concave.

Question 2

Pour une fonction concave, la courbe est au-dessus de ses cordes. L'image du milieu de $[a; b]$ est supérieure ou égale à la moyenne des images.

$$\ln \frac{a+b}{2} \geq \frac{\ln a + \ln b}{2}$$

Question 3

On a $\frac{\ln a + \ln b}{2} = \frac{1}{2} \ln(ab) = \ln \sqrt{ab}$. Donc $\ln \sqrt{ab} \leq \ln \frac{a+b}{2}$. Comme $\ln$ est strictement croissante :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Ce qui peut tomber au bac

- Des **études complètes** avec $\ln$ et puissances de x (exercices 1, 2, 5, 6, 7).
- Une fonction **paire ou impaire** avec $\ln$ d'une expression (exercices 3 et 4).
- Un **minimum qui donne une inégalité** (exercices 3 et 6).
- Une **équation** $f(x) = k$ résolue par le corollaire du TVI, et explicitement (exercice 4).
- Une **application de la concavité** (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Sur $]0; +\infty[$, la fonction $f(x) = x - \ln x$ admet un minimum égal à :

- A. 1, atteint en $x = e$
- B. e , atteint en $x = e$
- C. 0, atteint en $x = 1$
- D. 1, atteint en $x = 1$ (bonne réponse)

Justification : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ s'annule en 1 et change de signe : $f(1) = 1 - 0 = 1$.

2. La fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ admet un maximum en :

- A. $x = e$, de valeur $\frac{1}{e}$ (bonne réponse)
- B. $x = 1$, de valeur 0
- C. $x = e$, de valeur e
- D. $x = 1$, de valeur 1

Justification : $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ s'annule en e et $f(e) = \frac{1}{e}$.

3. L'inégalité $\ln x \leq x - 1$ (pour $x > 0$) vient de :

- A. la parité de $\ln$
- B. la limite de $\ln$ en $+\infty$
- C. la convexité de $\ln$
- D. la concavité de $\ln$: la courbe est sous sa tangente en 1 (bonne réponse)

Justification : La tangente en 1 à la courbe de $\ln$ a pour équation $y = x - 1$.

4. La fonction logarithme népérien est :

- A. strictement croissante sur $]0; +\infty[$ (bonne réponse)

- B. décroissante sur $]0; +\infty[$
- C. constante
- D. croissante sur $\mathbb{R}$

Justification : Sa dérivée $\frac{1}{x}$ est strictement positive sur $]0; +\infty[$.

5. Quelle est la dérivée seconde de $\ln x$?

- A. $-\frac{1}{x^2}$ (**bonne réponse**)
- B. $\frac{1}{x^2}$
- C. $-\frac{1}{x}$
- D. $\frac{1}{x}$

Justification : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ puis $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$: $\ln$ est concave.

6. Dans l'exercice 1, avec $f(x) = (\ln x)^2$, quel est le point d'inflexion de sa courbe ?

- A. $(e; 1)$ (**bonne réponse**)
- B. $(1; 0)$
- C. $(1; 1)$
- D. $(e; e)$

Justification : $f''(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$ s'annule en $x = e$, et $f(e) = (\ln e)^2 = 1$.

7. Dans l'exercice 2, avec $f(x) = x(\ln x - 1)$, en quel point la courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

- A. en $x = e$ (**bonne réponse**)
- B. elle ne le coupe jamais
- C. en $x = 1$
- D. en $x = 0$

Justification : $f(x) = 0 \iff x = 0$ (exclu) ou $\ln x = 1 \iff x = e$.

8. Dans l'exercice 3, avec $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, quelle inégalité prouve-t-on pour tout réel x ?

- A. $f(x) \geq x^2$
- B. $f(x) = x^2$
- C. $f(x) \leq x$
- D. $f(x) \leq x^2$ (**bonne réponse**)

Justification : On étudie $g(x) = x^2 - \ln(x^2 + 1)$, dont le minimum est $g(0) = 0$: donc $g(x) \geq 0$, soit $f(x) \leq x^2$.

9. Dans l'exercice 4, avec $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, quel est le point d'inflexion de sa courbe ?

- A. $(-1; 0)$

- B. il n'y en a pas
- C. $O(0;0)$ (bonne réponse)
- D. $(1;0)$

Justification : f est impaire et concave puis convexe de part et d'autre de 0 : le point d'inflexion est l'origine, centre de symétrie.

10. Dans l'exercice 8, la concavité de $\ln$ permet de démontrer l'inégalité :

- A. $a + b \leq 2\sqrt{ab}$ implique $a = b$
- B. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ pour $a, b > 0$ (bonne réponse)
- C. $\sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2}$
- D. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Justification : On passe de $\ln \frac{a+b}{2} \geq \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln \sqrt{ab}$ à $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ par croissance de l'exponentielle.