

Fiche 2 : dérivées, limites et inégalités avec $\ln$

Neuf exercices pour maîtriser le calcul avec $\ln$:

- dérivées ;
- limites et croissances comparées ;
- deux études de fonctions classiques ($x \ln x$ et $\frac{\ln x}{x}$) ;
- l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ et ses conséquences ;
- tangentes ;
- nombre de solutions de $\ln x = mx$;
- la limite célèbre de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- domaine ;
- dérivabilité justifiée ;
- règle nommée à chaque limite ;
- tableau complet ;
- conclusion.

Les réflexes à avoir en tête

- **Dérivée** : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ avec $u > 0$; $(x \ln x)' = \ln x + 1$.
- **Limites** : $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$; $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ ; $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$ en 0 .
- **Inégalités** : $\ln x \leq x - 1$ et son jumeau $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.
- **Études** : domaine, limites, dérivée factorisée, tableau, puis convexité si demandé.

Les pièges classiques

- Écrire $\ln u$ sans avoir vérifié $u > 0$.
- Écrire « $x \ln x = 0 \times (-\infty) = 0$ » sans citer les **croissances comparées**.
- Oublier que $\ln x \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$ (et non 0).
- Conclure à un extremum sans le **changement de signe** de la dérivée.

Le logarithme est lent : il monte, mais plus lentement que n'importe quelle puissance. C'est la tortue du programme, mais elle finit par arriver.

Exercice 1 (★) : dérivées avec ln

Dériver, en précisant l'ensemble de dérivabilité :

1. $f(x) = \ln(3x + 2)$

2. $g(x) = \ln(x^2 + 1)$

3. $h(x) = x \ln x - x$

4. $k(x) = \frac{\ln x}{x}$

5. $m(x) = \ln(1 + e^x)$

6. $p(x) = \sqrt{\ln x}$

7. $q(x) = (\ln x)^2$

Exercice 2 (★★) : limites avec ln

Déterminer :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2x + 1}{x - 3}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x + 1) - \ln x)$

8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$

Exercice 3 (★★) : l'étude de $x \ln x$

Soit $f(x) = x \ln x$ sur $]0; +\infty[$. Déterminer les limites, les variations, le minimum, et étudier la convexité.

Exercice 4 (★★) : l'étude de $\frac{\ln x}{x}$

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Déterminer les limites et les asymptotes, les variations, et étudier la convexité (point d'inflexion).

Exercice 5 (★★★) : l'inégalité $\ln x \leq x - 1$

Soit $f(x) = x - \ln x$ sur $]0; +\infty[$. Étudier f et en déduire que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

Exercice 6 (★★★) : nombre de solutions de $\ln x = mx$

1. Discuter, selon le réel m , le nombre de solutions de l'équation $\ln x = mx$ sur $]0; +\infty[$.
2. Comparer e^π et π^e .

Exercice 7 (★★) : tangentes à la courbe de $\ln$

1. Déterminer les tangentes à la courbe de $\ln$ aux points d'abscisses 1 et e .
2. Déterminer la tangente à la courbe de $\ln$ qui passe par l'origine O .

Exercice 8 (★★★) : encadrer $\ln$ et la série harmonique

On admet que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

1. Montrer que $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.
3. Calculer $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$. En déduire que $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 9 (★★★) : la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

1. Montrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$, puis que $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers 1.
2. En déduire $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
3. Déterminer de même $\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ et $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **dérivées avec ln** et le signe qui en découle (exercice 1).
- Des **limites avec ln** et croissances comparées (exercice 2).
- Les **études classiques** de $x \ln x$, $\frac{\ln x}{x}$ et $x - \ln x$ (exercices 3, 4, 5).
- Un **nombre de solutions** avec le corollaire du TVI (exercice 6).
- Un **encadrement** de ln et des suites (exercices 8 et 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la dérivée de $\ln(x^2 + 1)$?
 A. $\frac{1}{x^2 + 1}$
 B. $2x$
 C. $\frac{2x}{x^2 + 1}$
 D. $\ln(2x)$
2. Quelle est la limite de $\ln x$ quand $x \rightarrow +\infty$?
 A. 0
 B. $-\infty$
 C. 1
 D. $+\infty$
3. Quelle est la limite de $\ln x$ quand $x \rightarrow 0^+$?
 A. $-\infty$
 B. 0
 C. $+\infty$
 D. 1
4. Quelle est la limite de $\frac{\ln x}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$?

- A. e
 - B. 1
 - C. $+\infty$
 - D. 0
5. Quelle est la limite de $x \ln x$ quand $x \rightarrow 0^+$?
- A. $-\infty$
 - B. 1
 - C. 0
 - D. $+\infty$
6. Dans l'exercice 1, quelle est la dérivée de $k(x) = \frac{\ln x}{x}$?
- A. $\frac{1}{x^2}$
 - B. $\frac{1 - \ln x}{x^2}$
 - C. $\frac{1 + \ln x}{x^2}$
 - D. $\frac{\ln x}{x^2}$
7. Dans l'exercice 2, quelle est la limite de $x^2 \ln x$ quand $x \rightarrow 0^+$?
- A. 1
 - B. $+\infty$
 - C. 0
 - D. $-\infty$
8. Dans l'exercice 3, avec $f(x) = x \ln x$, quel est son minimum sur $]0; +\infty[$?
- A. $-\frac{1}{e}$
 - B. -1
 - C. $\frac{1}{e}$
 - D. 0
9. Dans l'exercice 7, quelle est la seule tangente à la courbe de $\ln$ qui passe par l'origine O ?
- A. la tangente au point d'abscisse e , d'équation $y = \frac{x}{e}$
 - B. il n'y en a pas
 - C. la tangente au point d'abscisse 1
 - D. la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$
10. Dans l'exercice 9, quelle est la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quand $n \rightarrow +\infty$?
- A. 0

B. 1

C. $+\infty$

D. e