

Fiche 2 : dérivées, limites et inégalités avec $\ln$

Neuf exercices pour maîtriser le calcul avec $\ln$:

- dérivées ;
- limites et croissances comparées ;
- deux études de fonctions classiques ($x \ln x$ et $\frac{\ln x}{x}$) ;
- l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ et ses conséquences ;
- tangentes ;
- nombre de solutions de $\ln x = mx$;
- la limite célèbre de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- domaine ;
- dérivabilité justifiée ;
- règle nommée à chaque limite ;
- tableau complet ;
- conclusion.

Les réflexes à avoir en tête

- **Dérivée** : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ avec $u > 0$; $(x \ln x)' = \ln x + 1$.
- **Limites** : $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$; $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ ; $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$ en 0 .
- **Inégalités** : $\ln x \leq x - 1$ et son jumeau $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.
- **Études** : domaine, limites, dérivée factorisée, tableau, puis convexité si demandé.

Les pièges classiques

- Écrire $\ln u$ sans avoir vérifié $u > 0$.
- Écrire « $x \ln x = 0 \times (-\infty) = 0$ » sans citer les **croissances comparées**.
- Oublier que $\ln x \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$ (et non 0).
- Conclure à un extremum sans le **changement de signe** de la dérivée.

Le logarithme est lent : il monte, mais plus lentement que n'importe quelle puissance. C'est la tortue du programme, mais elle finit par arriver.

Exercice 1 (★) : dérivées avec ln

Dériver, en précisant l'ensemble de dérivabilité :

1. $f(x) = \ln(3x + 2)$

2. $g(x) = \ln(x^2 + 1)$

3. $h(x) = x \ln x - x$

4. $k(x) = \frac{\ln x}{x}$

5. $m(x) = \ln(1 + e^x)$

6. $p(x) = \sqrt{\ln x}$

7. $q(x) = (\ln x)^2$

Correction de l'exercice 1**Méthode**

On utilise $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ pour u dérivable et strictement positive.

Question 1

Pour $x > -\frac{2}{3}$, $3x + 2 > 0$. f est dérivable sur $]-\frac{2}{3}; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{3}{3x + 2}$$

Question 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$: g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Question 3

h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme et produit. $h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1$.

$$h'(x) = \ln x$$

Question 4

k est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. $k'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2}$.

$$k'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Question 5

Pour tout x , $1 + e^x > 0$: m est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$m'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

Question 6

La fonction p est définie et dérivable là où $\ln x > 0$, c'est-à-dire sur $]1; +\infty[$. Avec $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $u(x) = \ln x$:

$$p'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

Question 7

Avec $(u^2)' = 2u'u$ et $u(x) = \ln x$, sur $]0; +\infty[$:

$$q'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$$

Exercice 2 (★★) : limites avec ln

Déterminer :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2x+1}{x-3}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln x)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$$

Correction de l'exercice 2

Question 1

Forme « $+\infty - \infty$ ». Pour $x > 0$: $x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$. Par croissances comparées,

$\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, donc $1 - \frac{\ln x}{x} \rightarrow 1$. Par produit :

$\lim = +\infty$

Question 2

Pour $x > 0$: $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. Comme $X = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$, par croissances comparées $\frac{\ln X}{X} \rightarrow 0$.

Par composition et produit :

$$\lim = 0$$

Question 3

Par croissances comparées ($n = 2$) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$$

Question 4

C'est le nombre dérivé de $\ln$ en 1 : $\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \rightarrow \ln'(1) = 1$.

$$\lim = 1$$

Question 5

C'est le nombre dérivé de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 : $\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} \rightarrow \frac{1}{1+0} = 1$.

$$\lim = 1$$

Question 6

Pour $x > 3$: $\frac{2x+1}{x-3} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} \rightarrow 2$. Comme $\ln$ est continue en 2, par composition :

$$\lim = \ln 2$$

Question 7

Pour $x > 0$: $\ln(x+1) - \ln x = \ln \frac{x+1}{x} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Comme $1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1$ et $\ln$ est continue en 1 :

$$\lim = \ln 1 = 0$$

Question 8

Quand $x \rightarrow 0^+$, $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$. Par produit :

$$\lim = -\infty$$

Exercice 3 (★★) : l'étude de $x \ln x$

Soit $f(x) = x \ln x$ sur $]0; +\infty[$. Déterminer les limites, les variations, le minimum, et étudier la convexité.

Correction de l'exercice 3**Limites**

En 0^+ : par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = 0$$

En $+\infty$: $x \rightarrow +\infty$ et $\ln x \rightarrow +\infty$, donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

Variations

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit. $f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x}$.

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$\ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1}$. Donc $f' < 0$ sur $]0; \frac{1}{e}[$, $f' \left(\frac{1}{e} \right) = 0$, $f' > 0$ sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$.

f est strictement décroissante sur $]0; \frac{1}{e}[$ (de 0 à $f \left(\frac{1}{e} \right)$) et strictement croissante sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$ (jusqu'à $+\infty$).

Son minimum est $f \left(\frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}$.

Le minimum est $-\frac{1}{e}$.

Convexité

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ sur }]0; +\infty[.$$

f est convexe.

Exercice 4 (★★) : l'étude de $\frac{\ln x}{x}$

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Déterminer les limites et les asymptotes, les variations, et étudier la convexité (point d'inflexion).

Correction de l'exercice 4**Limites**

En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty$$

La droite $x = 0$ est asymptote verticale.

En $+\infty$: par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$$

La droite $y = 0$ est asymptote horizontale.

Variations

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient. $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$, positif pour $x < e$.

f est strictement croissante sur $]0; e]$ (de $-\infty$ à $f(e) = \frac{1}{e}$) et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$ (de $\frac{1}{e}$ à 0).

Maximum : $f(e) = \frac{1}{e}$.

Convexité

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

Pour $x > 0$, $f''(x)$ est du signe de $2 \ln x - 3$, positif pour $x > e^{3/2}$.

f est concave sur $]0; e^{3/2}]$ et convexe sur $[e^{3/2}; +\infty[$.

La courbe a un point d'inflexion en $\left(e^{3/2}; \frac{3}{2}e^{-3/2}\right)$.

Exercice 5 (★★★) : l'inégalité $\ln x \leq x - 1$

Soit $f(x) = x - \ln x$ sur $]0; +\infty[$. Étudier f et en déduire que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

Correction de l'exercice 5

Limites

En 0^+ : $x \rightarrow 0$ et $-\ln x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty$$

En $+\infty$: $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ et $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ (croissances comparées).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

Variations

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x - 1$. f est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Elle admet un minimum en 1, égal à $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$.

Conséquence

Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 1$, soit $x - \ln x \geq 1$.

$\ln x \leq x - 1$, avec égalité uniquement en $x = 1$.

Exercice 6 (★★★) : nombre de solutions de $\ln x = mx$

1. Discuter, selon le réel m , le nombre de solutions de l'équation $\ln x = mx$ sur $]0; +\infty[$.
2. Comparer e^π et π^e .

Correction de l'exercice 6

Question 1

Pour $x > 0$: $\ln x = mx \iff \frac{\ln x}{x} = m$. C'est $f(x) = m$ avec $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

D'après l'exercice 4, f est continue, strictement croissante sur $]0; e]$ de $-\infty$ à $\frac{1}{e}$, et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$ de $\frac{1}{e}$ à la limite 0 (non atteinte : $f(x) > 0$ pour $x > 1$).

- Si $m > \frac{1}{e}$: aucune solution ($f \leq \frac{1}{e}$).
- Si $m = \frac{1}{e}$: une unique solution, $x = e$.
- Si $0 < m < \frac{1}{e}$: d'après le corollaire du TVI, une unique solution dans $]0; e[$ et une unique solution dans $]e; +\infty[$.

Deux solutions.

- Si $m \leq 0$: sur $]0; e]$, m est compris entre $-\infty$ et $\frac{1}{e}$, donc une unique solution ($x = 1$ si $m = 0$) ; sur $[e; +\infty[$, $f(x) > 0 \geq m$, donc aucune solution.

Une seule solution.

Question 2

Comme $e < \pi$ et que f est strictement décroissante sur $[e; +\infty[: f(\pi) < f(e)$, c'est-à-dire $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$.

En multipliant par $e\pi > 0 : e \ln \pi < \pi$, soit $\ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$, puisque $\ln(e^\pi) = \pi$.

Comme $\ln$ est strictement croissante :

$$\pi^e < e^\pi$$

Exercice 7 (★★) : tangentes à la courbe de $\ln$

1. Déterminer les tangentes à la courbe de $\ln$ aux points d'abscisses 1 et e .
2. Déterminer la tangente à la courbe de $\ln$ qui passe par l'origine O .

Correction de l'exercice 7

Question 1

$\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

En 1 : $\ln 1 = 0$ et $\ln'(1) = 1$, donc $y = 0 + 1(x - 1)$.

$$y = x - 1$$

En e : $\ln e = 1$ et $\ln'(e) = \frac{1}{e}$, donc $y = 1 + \frac{1}{e}(x - e)$.

$$y = \frac{x}{e}$$

Question 2

La tangente au point d'abscisse $a > 0$ a pour équation :

$$y = \ln a + \frac{1}{a}(x - a)$$

Elle passe par O si et seulement si $0 = \ln a - 1$, soit $\ln a = 1$, c'est-à-dire $a = e$.

La seule tangente passant par l'origine est $y = \frac{x}{e}$, la tangente en e .

Exercice 8 (★★★) : encadrer ln et la série harmonique

On admet que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

1. Montrer que $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

3. Calculer $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$. En déduire que $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 8**Question 1**

Soit $x > 0$. Alors $\frac{1}{x} > 0$, et l'inégalité admise appliquée à $\frac{1}{x}$ donne $\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$. Or $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$. Donc $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$.

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$$

Question 2

Soit $n \geq 1$ et $x = 1 + \frac{1}{n} > 0$. L'inégalité admise donne $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$. La question 1 donne :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Question 3

Pour $k \geq 1$: $\ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln \frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$. En sommant de $k = 1$ à n , les termes se simplifient (télescopage) :

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

D'après la question 2, $\frac{1}{k} \geq \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ pour tout k . En sommant : $H_n \geq \ln(n+1)$. Comme $\lim \ln(n+1) = +\infty$, d'après le théorème de comparaison :

$$\lim H_n = +\infty$$

Donc la série harmonique diverge.

Exercice 9 (★★★) : la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

1. Montrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$, puis que $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers 1.
2. En déduire $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
3. Déterminer de même $\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ et $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Correction de l'exercice 9

Question 1

Pour $n \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)} = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

Avec $h = \frac{1}{n} \rightarrow 0$: $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln(1+h)}{h}$. Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$:

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$$

Autre méthode : l'exercice 8 donne $\frac{n}{n+1} \leq n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$. Comme $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$, les gendarmes concluent.

Question 2

L'exponentielle est continue en 1. Par composition :

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$$

Question 3

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)}. \quad n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = 2 \times \frac{\ln(1+h)}{h} \text{ avec } h = \frac{2}{n} \rightarrow 0, \text{ donc}$$

$$n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \rightarrow 2. \text{ Par composition :}$$

$$\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

$$\text{De même } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}. \quad n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{\ln(1+h)}{h} \text{ avec } h = -\frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ donc}$$

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow -1.$$

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

Ce qui peut tomber au bac

- Des **dérivées avec $\ln$** et le signe qui en découle (exercice 1).
- Des **limites avec $\ln$** et croissances comparées (exercice 2).
- Les **études classiques** de $x \ln x$, $\frac{\ln x}{x}$ et $x - \ln x$ (exercices 3, 4, 5).
- Un **nombre de solutions** avec le corollaire du TVI (exercice 6).
- Un **encadrement** de $\ln$ et des suites (exercices 8 et 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la dérivée de $\ln(x^2 + 1)$?

- A. $\frac{1}{x^2 + 1}$
- B. $2x$
- C. $\frac{2x}{x^2 + 1}$ (bonne réponse)
- D. $\ln(2x)$

Justification : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1$ et $u' = 2x$.

2. Quelle est la limite de $\ln x$ quand $x \rightarrow +\infty$?

- A. 0
- B. $-\infty$
- C. 1
- D. $+\infty$ (bonne réponse)

Justification : Le logarithme tend vers $+\infty$, mais très lentement.

3. Quelle est la limite de $\ln x$ quand $x \rightarrow 0^+$?

- A. $-\infty$ (bonne réponse)
- B. 0
- C. $+\infty$
- D. 1

Justification : La courbe de $\ln$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

4. Quelle est la limite de $\frac{\ln x}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$?

- A. e
- B. 1
- C. $+\infty$
- D. 0 (bonne réponse)

Justification : Par croissances comparées, x l'emporte sur $\ln x$.

5. Quelle est la limite de $x \ln x$ quand $x \rightarrow 0^+$?

- A. $-\infty$
- B. 1
- C. 0 (**bonne réponse**)
- D. $+\infty$

Justification : Par croissances comparées, $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ (une forme indéterminée $0 \times (-\infty)$ levée).

6. Dans l'exercice 1, quelle est la dérivée de $k(x) = \frac{\ln x}{x}$?

- A. $\frac{1}{x^2}$
- B. $\frac{1 - \ln x}{x^2}$ (**bonne réponse**)
- C. $\frac{1 + \ln x}{x^2}$
- D. $\frac{\ln x}{x^2}$

Justification : Quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = \ln x$, $v = x$: $\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

7. Dans l'exercice 2, quelle est la limite de $x^2 \ln x$ quand $x \rightarrow 0^+$?

- A. 1
- B. $+\infty$
- C. 0 (**bonne réponse**)
- D. $-\infty$

Justification : Par croissances comparées, $x^n \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ (la puissance de x l'emporte sur le logarithme).

8. Dans l'exercice 3, avec $f(x) = x \ln x$, quel est son minimum sur $]0; +\infty[$?

- A. $-\frac{1}{e}$ (**bonne réponse**)
- B. -1
- C. $\frac{1}{e}$
- D. 0

Justification : $f'(x) = \ln x + 1$ s'annule en $\frac{1}{e}$: $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$.

9. Dans l'exercice 7, quelle est la seule tangente à la courbe de $\ln$ qui passe par l'origine O ?

- A. la tangente au point d'abscisse e , d'équation $y = \frac{x}{e}$ (**bonne réponse**)
- B. il n'y en a pas
- C. la tangente au point d'abscisse 1

D. la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$

Justification : En cherchant a tel que la tangente en a passe par O , on trouve $a = e$.

10. Dans l'exercice 9, quelle est la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quand $n \rightarrow +\infty$?

A. 0

B. 1

C. $+\infty$

D. e (bonne réponse)

Justification : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+1/n)}$ et $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$, donc la limite est $e^1 = e$.