

Fiche 1 : propriétés, équations et inéquations

Dix exercices pour maîtriser toutes les manipulations de $\ln$:

- propriétés algébriques ;
- ensembles de définition ;
- équations et inéquations avec $\ln$;
- équations exponentielles avec changement de variable ;
- seuils avec des suites ;
- démonstrations et vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- ensemble de définition écrit en premier ;
- équivalences justifiées ;
- solutions vérifiées ;
- conclusion.

Le modèle de rédaction d'une équation avec $\ln$

« *Ensemble de définition* : l'équation a un sens pour x tel que $\dots > 0$, soit $x \in \dots$

Résolution : pour x dans cet ensemble, $\ln A = \ln B \iff A = B$, donc ...

Vérification : la solution ... appartient bien à l'ensemble de définition.

Conclusion : $S = \{\dots\}$. »

- $\ln A = \ln B \iff A = B$ (avec $A, B > 0$)
- $\ln A = k \iff A = e^k$
- Pour une inéquation, $\ln$ étant strictement croissante, le sens de l'inégalité est conservé.

Les pièges classiques

- Oublier l'**ensemble de définition**, puis garder une solution qui n'y est pas.
- Écrire $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$.
- Oublier de **retourner l'inégalité** en divisant par un logarithme négatif ($\ln q$ avec $q < 1$).
- Poser $X = e^x$ et garder une solution négative ou nulle : $X = e^x > 0$.

Une équation avec $\ln$ sans ensemble de définition, c'est un voyage sans passeport : ça passe rarement la frontière.

Exercice 1 (★) : exprimer avec $\ln 2$ et $\ln 3$

On note $a = \ln 2$ et $b = \ln 3$.

Exprimer en fonction de a et b :

$\ln 12$, $\ln 36$, $\ln \frac{2}{3}$, $\ln 0,75$, $\ln \sqrt{6}$, $\ln 72$.

Exercice 2 (★) : simplifier

Simplifier :

$$A = \ln(e^3) + \ln \frac{1}{e}$$

$$B = \ln(e^2 \sqrt{e})$$

$$C = e^{2 \ln 3}$$

$$D = e^{-\ln 2}$$

$$E = \ln \frac{\sqrt{e}}{e^2}$$

Exercice 3 (★★) : ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition de :

1. $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

2. $g(x) = \ln \frac{x-1}{x+2}$

3. $h(x) = \ln x + \ln(x-2)$

4. $k(x) = \frac{1}{\ln x}$

Exercice 4 (★★) : équations avec $\ln$

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(2x-1) = 3$

2. $\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$

3. $\ln(x+1) = \ln(3-x)$

4. $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

Exercice 5 (★★) : inéquations avec $\ln$

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x - 3) \geq 0$
2. $\ln(2x + 1) < 1$
3. $\ln x + \ln(x - 2) \leq \ln 3$
4. $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 > 0$

Exercice 6 (★★) : équations exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
2. $e^{x+1} = 5$
3. $3e^{-x} = 2$
4. $e^x - 2e^{-x} = 1$

Exercice 7 (★★) : inéquations exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{3x-1} \geq 2$
2. $e^{-x} < \frac{1}{3}$

Exercice 8 (★★) : seuils avec $\ln$

Déterminer le plus petit entier n tel que :

1. $1,05^n \geq 2$
2. $500 \times 1,04^n \geq 1\,000$
3. $2 \times 0,8^n < 0,01$

Exercice 9 (★★★) : démontrer les propriétés

On admet que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour $a, b > 0$.

Démontrer que, pour $a > 0$:

1. $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
2. $\ln(a^n) = n \ln a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par récurrence)
3. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Exercice 10 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Pour tous réels $a, b > 0$, $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$.
2. Pour tout réel $a \neq 0$, $\ln(a^2) = 2 \ln a$.
3. $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$.
4. Pour $x, y > 0$, $\frac{\ln x}{\ln y} = \ln \frac{x}{y}$ (avec $y \neq 1$).
5. Pour tout réel x , $e^{\ln x} = x$.
6. Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **équations et inéquations avec $\ln$** , avec leur ensemble de définition (exercices 3, 4, 5).
- Des **équations exponentielles** avec changement de variable $X = e^x$ (exercice 6).
- Des **seuils** de suites avec $\ln$, en retournant l'inégalité si nécessaire (exercice 8).
- Des **démonstrations de propriétés** et des **vrai/faux** (exercices 9 et 10).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(ab)$ vaut :
 - A. $\ln a \times \ln b$
 - B. $\ln a + \ln b$
 - C. $\ln a - \ln b$
 - D. $\ln(a + b)$
2. Que vaut $\ln(e^3)$?

A. 3

B. e^3

C. $3e$

D. $\frac{1}{3}$

3. Quelle est la solution de $\ln x = 2$?

A. $\ln 2$

B. e^2

C. $2e$

D. 2

4. Quel est l'ensemble solution de $\ln(2x - 1) \geq 0$?

A. $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

B. $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$

C. $[1; +\infty[$

D. $[0; +\infty[$

5. Quel est l'ensemble de définition de $x \mapsto \ln(3 - x)$?

A. $]3; +\infty[$

B. $\mathbb{R}$

C. $] - \infty; 3]$

D. $] - \infty; 3[$

6. Dans l'exercice 1, avec $a = \ln 2$ et $b = \ln 3$, comment s'exprime $\ln 12$?

A. $2a + b$

B. $a + 2b$

C. $4a + 3b$

D. $a \times b$

7. Dans l'exercice 2, que vaut $C = e^{2\ln 3}$?

A. 6

B. 9

C. $2\ln 3$

D. 3

8. Dans l'exercice 3, quel est l'ensemble de définition de $h(x) = \ln x + \ln(x - 2)$?

A. $[2; +\infty[$

B. $]2; +\infty[$

C. $]0; +\infty[$

D. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

9. Dans l'exercice 4, quelle est la solution de $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6$?

A. $x = 2$

B. $x = -2$ ou $x = 3$

C. $x = 6$

D. $x = 3$

10. Dans l'exercice 8, quel est le plus petit entier n tel que $1,05^n \geq 2$?

A. 14

B. 2

C. 20

D. 15