

Fiche 1 : propriétés, équations et inéquations

Dix exercices pour maîtriser toutes les manipulations de $\ln$:

- propriétés algébriques ;
- ensembles de définition ;
- équations et inéquations avec $\ln$;
- équations exponentielles avec changement de variable ;
- seuils avec des suites ;
- démonstrations et vrai/faux.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :

- ensemble de définition écrit en premier ;
- équivalences justifiées ;
- solutions vérifiées ;
- conclusion.

Le modèle de rédaction d'une équation avec $\ln$

« *Ensemble de définition* : l'équation a un sens pour x tel que $\dots > 0$, soit $x \in \dots$

Résolution : pour x dans cet ensemble, $\ln A = \ln B \iff A = B$, donc ...

Vérification : la solution ... appartient bien à l'ensemble de définition.

Conclusion : $S = \{\dots\}$. »

- $\ln A = \ln B \iff A = B$ (avec $A, B > 0$)
- $\ln A = k \iff A = e^k$
- Pour une inéquation, $\ln$ étant strictement croissante, le sens de l'inégalité est conservé.

Les pièges classiques

- Oublier l'**ensemble de définition**, puis garder une solution qui n'y est pas.
- Écrire $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$.
- Oublier de **retourner l'inégalité** en divisant par un logarithme négatif ($\ln q$ avec $q < 1$).
- Poser $X = e^x$ et garder une solution négative ou nulle : $X = e^x > 0$.

Une équation avec $\ln$ sans ensemble de définition, c'est un voyage sans passeport : ça passe rarement la frontière.

Exercice 1 (★) : exprimer avec $\ln 2$ et $\ln 3$

On note $a = \ln 2$ et $b = \ln 3$.

Exprimer en fonction de a et b :

$\ln 12$, $\ln 36$, $\ln \frac{2}{3}$, $\ln 0,75$, $\ln \sqrt{6}$, $\ln 72$.

Correction de l'exercice 1**Méthode**

On décompose chaque nombre en produit de puissances de 2 et de 3. Puis on applique $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln(x^n) = n \ln x$ et $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ (pour $x, y > 0$).

$$\ln 12 = \ln(2^2 \times 3) = 2 \ln 2 + \ln 3$$

$$\ln 12 = 2a + b$$

$$\ln 36 = \ln(2^2 \times 3^2)$$

$$\ln 36 = 2a + 2b$$

$$\ln \frac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3$$

$$\ln \frac{2}{3} = a - b$$

$$\ln 0,75 = \ln \frac{3}{4} = \ln 3 - \ln 2^2$$

$$\ln 0,75 = b - 2a$$

$$\ln \sqrt{6} = \frac{1}{2} \ln 6 = \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln 3)$$

$$\ln \sqrt{6} = \frac{a + b}{2}$$

$$\ln 72 = \ln(2^3 \times 3^2)$$

$$\ln 72 = 3a + 2b$$

Exercice 2 (★) : simplifier**Simplifier :**

$$A = \ln(e^3) + \ln \frac{1}{e}$$

$$B = \ln(e^2 \sqrt{e})$$

$$C = e^{2 \ln 3}$$

$$D = e^{-\ln 2}$$

$$E = \ln \frac{\sqrt{e}}{e^2}$$

Correction de l'exercice 2**Méthode**

On utilise $\ln(e^x) = x$, $e^{\ln x} = x$ ($x > 0$) et les propriétés algébriques.

$$A = 3 + \ln(e^{-1}) = 3 - 1$$

$$A = 2$$

$$B = \ln(e^2) + \ln(e^{1/2}) = 2 + \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{5}{2}$$

$$C = e^{\ln 3^2} = e^{\ln 9}$$

$$C = 9$$

$$D = e^{\ln \frac{1}{2}}$$

$$D = \frac{1}{2}$$

$$E = \ln(e^{1/2}) - \ln(e^2) = \frac{1}{2} - 2$$

$$E = -\frac{3}{2}$$

Exercice 3 (★★) : ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition de :

1. $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

2. $g(x) = \ln \frac{x-1}{x+2}$

3. $h(x) = \ln x + \ln(x-2)$

4. $k(x) = \frac{1}{\ln x}$

Correction de l'exercice 3

Question 1

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4 > 0$, c'est-à-dire $(x-2)(x+2) > 0$. Ce trinôme est positif à l'extérieur de ses racines -2 et 2 .

$$D_f =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$$

Question 2

$g(x)$ existe si et seulement si $x \neq -2$ et $\frac{x-1}{x+2} > 0$. Par un tableau de signes :

- le quotient est positif pour $x < -2$ (numérateur et dénominateur négatifs) ;
- positif pour $x > 1$ (tous deux positifs) ;
- négatif pour $-2 < x < 1$.

$$D_g =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$$

Question 3

$h(x)$ existe si et seulement si $x > 0$ et $x-2 > 0$, c'est-à-dire $x > 2$.

$$D_h =]2; +\infty[$$

Question 4

$k(x)$ existe si et seulement si $x > 0$ et $\ln x \neq 0$. Comme $\ln x = 0 \iff x = 1$:

$$D_k =]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

Exercice 4 (★★) : équations avec ln**Résoudre dans $\mathbb{R}$:**

1. $\ln(2x - 1) = 3$

2. $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6$

3. $\ln(x + 1) = \ln(3 - x)$

4. $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

Correction de l'exercice 4

Question 1

Ensemble de définition : $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$.Pour $x > \frac{1}{2}$:

$$\ln(2x - 1) = 3 \iff 2x - 1 = e^3 \iff x = \frac{e^3 + 1}{2}$$

Ce nombre est supérieur à $\frac{1}{2}$.

$$S = \left\{ \frac{e^3 + 1}{2} \right\}$$

Question 2

Ensemble de définition : $x > 0$ et $x - 1 > 0$, soit $x > 1$.Pour $x > 1$: $\ln x + \ln(x - 1) = \ln(x(x - 1))$. L'équation équivaut à $x(x - 1) = 6$, soit $x^2 - x - 6 = 0$. $(x - 3)(x + 2) = 0$, donc $x = 3$ ou $x = -2$. Comme $x > 1$, -2 est exclu.

$$S = \{3\}$$

Question 3

Ensemble de définition : $x + 1 > 0$ et $3 - x > 0$, soit $-1 < x < 3$.Pour x dans $] -1 ; 3[$:

$$\ln(x + 1) = \ln(3 - x) \iff x + 1 = 3 - x \iff x = 1$$

Ce nombre appartient à $] -1 ; 3[$.

$$S = \{1\}$$

Question 4

Ensemble de définition : $x > 0$.On pose $X = \ln x$. L'équation devient $X^2 - X - 2 = 0$, soit $(X - 2)(X + 1) = 0$. Donc $X = 2$ ou $X = -1$. Donc $\ln x = 2$ ou $\ln x = -1$, soit $x = e^2$ ou $x = e^{-1}$. Ces deux nombres sont bien strictement positifs.

$$S = \{e^{-1}; e^2\}$$

Exercice 5 (★★) : inéquations avec $\ln$

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x - 3) \geq 0$
2. $\ln(2x + 1) < 1$
3. $\ln x + \ln(x - 2) \leq \ln 3$
4. $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 > 0$

Correction de l'exercice 5

Question 1

Ensemble de définition : $x > 3$.

Comme $\ln 1 = 0$ et $\ln$ est strictement croissante :

$$\ln(x - 3) \geq 0 \iff \ln(x - 3) \geq \ln 1 \iff x - 3 \geq 1 \iff x \geq 4$$

$$S = [4; +\infty[$$

Question 2

$$\text{Ensemble de définition : } 2x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}.$$

Comme $\ln e = 1$:

$$\ln(2x + 1) < 1 \iff 2x + 1 < e \iff x < \frac{e - 1}{2}$$

$$S = \left] -\frac{1}{2}; \frac{e - 1}{2} \right[$$

Question 3

Ensemble de définition : $x > 0$ et $x - 2 > 0$, soit $x > 2$.

Pour $x > 2$:

$$\ln(x(x - 2)) \leq \ln 3 \iff x(x - 2) \leq 3$$

$$\iff x^2 - 2x - 3 \leq 0 \iff (x - 3)(x + 1) \leq 0 \iff -1 \leq x \leq 3$$

En tenant compte de $x > 2$:

$$S =]2; 3]$$

Question 4

Ensemble de définition : $x > 0$.

Avec $X = \ln x$:

$$X^2 - 3X + 2 > 0 \iff (X - 1)(X - 2) > 0 \iff X < 1 \text{ ou } X > 2$$

Donc $\ln x < 1$ ou $\ln x > 2$, soit $0 < x < e$ ou $x > e^2$.

$$S =]0; e[\cup]e^2; +\infty[$$

Exercice 6 (★★) : équations exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

2. $e^{x+1} = 5$

3. $3e^{-x} = 2$

4. $e^x - 2e^{-x} = 1$

Correction de l'exercice 6

Question 1

On pose $X = e^x$, avec $X > 0$. L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$, soit $(X - 1)(X - 2) = 0$. Donc $X = 1$ ou $X = 2$. Donc $e^x = 1$ ou $e^x = 2$, soit $x = 0$ ou $x = \ln 2$.

$$S = \{0; \ln 2\}$$

Question 2

$$e^{x+1} = 5 \iff x + 1 = \ln 5 \iff x = \ln 5 - 1$$

$$S = \{\ln 5 - 1\}$$

Question 3

$$3e^{-x} = 2 \iff e^{-x} = \frac{2}{3} \iff -x = \ln \frac{2}{3} \iff x = -\ln \frac{2}{3} = \ln \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ \ln \frac{3}{2} \right\}$$

Question 4

En multipliant par $e^x > 0$: $e^{2x} - 2 = e^x$, soit $e^{2x} - e^x - 2 = 0$. Avec $X = e^x > 0$: $X^2 - X - 2 = 0$, soit $(X - 2)(X + 1) = 0$. Donc $X = 2$ ou $X = -1$. Comme $X > 0$, $X = -1$ est exclu. Donc $e^x = 2$, soit $x = \ln 2$.

$$S = \{\ln 2\}$$

Exercice 7 (★★) : inéquations exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{3x-1} \geq 2$

2. $e^{-x} < \frac{1}{3}$

Correction de l'exercice 7

Question 1

Les deux membres sont strictement positifs, et $\ln$ est strictement croissante :

$$e^{3x-1} \geq 2 \iff 3x-1 \geq \ln 2 \iff x \geq \frac{1+\ln 2}{3}$$

$$S = \left[\frac{1+\ln 2}{3}; +\infty \right[$$

Question 2

$$e^{-x} < \frac{1}{3} \iff -x < \ln \frac{1}{3} = -\ln 3 \iff x > \ln 3$$

$$S =]\ln 3; +\infty[$$

Exercice 8 (★★) : seuils avec $\ln$

Déterminer le plus petit entier n tel que :

1. $1,05^n \geq 2$

2. $500 \times 1,04^n \geq 1\,000$

3. $2 \times 0,8^n < 0,01$

Correction de l'exercice 8

Question 1

Les deux membres sont strictement positifs, et $\ln$ est strictement croissante :

$$1,05^n \geq 2 \iff n \ln 1,05 \geq \ln 2$$

Comme $1,05 > 1$, $\ln 1,05 > 0$:

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2$$

Le plus petit entier est $n = 15$.

Question 2

$$500 \times 1,04^n \geq 1\,000 \iff 1,04^n \geq 2 \iff n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,04} \approx 17,67$$

Le plus petit entier est $n = 18$.

Question 3

$$2 \times 0,8^n < 0,01 \iff 0,8^n < 0,005 \iff n \ln 0,8 < \ln 0,005$$

Comme $0,8 < 1$, $\ln 0,8 < 0$: on divise en retournant l'inégalité.

$$n > \frac{\ln 0,005}{\ln 0,8} \approx 23,74$$

Le plus petit entier est $n = 24$.

Exercice 9 (★★★) : démontrer les propriétés

On admet que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour $a, b > 0$.

Démontrer que, pour $a > 0$:

1. $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
2. $\ln(a^n) = n \ln a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par récurrence)
3. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Correction de l'exercice 9

Question 1

On a $a \times \frac{1}{a} = 1$, donc $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$. Or $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{a}$. Donc $\ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$.

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

Question 2

Soit $P(n)$: « $\ln(a^n) = n \ln a$ ».

Initialisation.

$$\ln(a^0) = \ln 1 = 0 = 0 \times \ln a : P(0) \text{ est vraie.}$$

Hérédité.

Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\ln(a^k) = k \ln a$. Alors :

$$\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k) + \ln a = k \ln a + \ln a = (k+1) \ln a$$

$P(k+1)$ est vraie.

Conclusion.

$\ln(a^n) = n \ln a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Question 3

On a $(\sqrt{a})^2 = a$. D'après la question 2 avec $n = 2$: $\ln a = \ln((\sqrt{a})^2) = 2 \ln \sqrt{a}$.

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Exercice 10 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Pour tous réels $a, b > 0$, $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$.
2. Pour tout réel $a \neq 0$, $\ln(a^2) = 2 \ln a$.
3. $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$.
4. Pour $x, y > 0$, $\frac{\ln x}{\ln y} = \ln \frac{x}{y}$ (avec $y \neq 1$).
5. Pour tout réel x , $e^{\ln x} = x$.
6. Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.

Correction de l'exercice 10

Affirmation 1

Contre-exemple : $a = b = 1$. $\ln(1+1) = \ln 2 \neq 0 = \ln 1 + \ln 1$. C'est $\ln(ab)$ qui vaut $\ln a + \ln b$.

Faux.

Affirmation 2

Pour $a < 0$, $\ln a$ n'existe pas. Pour $a = -1$, $\ln(a^2) = \ln 1 = 0$, mais $2 \ln(-1)$ n'a pas de sens. La bonne formule est $\ln(a^2) = 2 \ln |a|$.

Faux.

Affirmation 3

$\ln$ est strictement croissante avec $\ln 1 = 0$. $\ln x < 0 \iff \ln x < \ln 1 \iff x < 1$, et $x > 0$ pour que $\ln x$ existe.

Vrai.

Affirmation 4

Contre-exemple : $x = e^2$ et $y = e$. $\frac{\ln x}{\ln y} = \frac{2}{1} = 2$, alors que $\ln \frac{x}{y} = \ln e = 1$. C'est $\ln x - \ln y$ qui vaut $\ln \frac{x}{y}$.

Faux.

Affirmation 5

$e^{\ln x} = x$ n'a de sens que pour $x > 0$. Pour $x \leq 0$, $\ln x$ n'existe pas.

Faux.

Affirmation 6

Pour tout réel x , $e^x > 0$ et $\ln$ est la réciproque de l'exponentielle.

Vrai.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **équations et inéquations avec $\ln$** , avec leur ensemble de définition (exercices 3, 4, 5).
- Des **équations exponentielles** avec changement de variable $X = e^x$ (exercice 6).
- Des **seuils** de suites avec $\ln$, en retournant l'inégalité si nécessaire (exercice 8).
- Des **démonstrations de propriétés** et des **vrai/faux** (exercices 9 et 10).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(ab)$ vaut :

- A. $\ln a \times \ln b$
- B. $\ln a + \ln b$ (**bonne réponse**)
- C. $\ln a - \ln b$
- D. $\ln(a + b)$

Justification : Le logarithme transforme un produit en somme.

2. Que vaut $\ln(e^3)$?

- A. **3 (bonne réponse)**
- B. e^3

C. $3e$ D. $\frac{1}{3}$ *Justification* : $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x .3. Quelle est la solution de $\ln x = 2$?A. $\ln 2$ B. e^2 (**bonne réponse**)C. $2e$ D. 2 *Justification* : On applique l'exponentielle : $x = e^{\ln x} = e^2$.4. Quel est l'ensemble solution de $\ln(2x - 1) \geq 0$?A. $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ B. $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$ C. $[1; +\infty[$ (**bonne réponse**)D. $[0; +\infty[$ *Justification* : $\ln(2x - 1) \geq 0 \iff 2x - 1 \geq 1 \iff x \geq 1$ (et $2x - 1 > 0$ est alors vérifié).5. Quel est l'ensemble de définition de $x \mapsto \ln(3 - x)$?A. $]3; +\infty[$ B. $\mathbb{R}$ C. $] - \infty; 3]$ D. $] - \infty; 3[$ (**bonne réponse**)*Justification* : Il faut $3 - x > 0$, soit $x < 3$.6. Dans l'exercice 1, avec $a = \ln 2$ et $b = \ln 3$, comment s'exprime $\ln 12$?A. $2a + b$ (**bonne réponse**)B. $a + 2b$ C. $4a + 3b$ D. $a \times b$ *Justification* : $12 = 2^2 \times 3$, donc $\ln 12 = 2\ln 2 + \ln 3 = 2a + b$.7. Dans l'exercice 2, que vaut $C = e^{2\ln 3}$?A. 6 B. 9 (**bonne réponse**)C. $2\ln 3$ D. 3

Justification : $e^{2\ln 3} = e^{\ln(3^2)} = 3^2 = 9$.

8. Dans l'exercice 3, quel est l'ensemble de définition de $h(x) = \ln x + \ln(x - 2)$?

- A. $[2; +\infty[$
- B. $]2; +\infty[$ (**bonne réponse**)
- C. $]0; +\infty[$
- D. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Justification : Il faut $x > 0$ et $x - 2 > 0$, donc $x > 2$.

9. Dans l'exercice 4, quelle est la solution de $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6$?

- A. $x = 2$
- B. $x = -2$ ou $x = 3$
- C. $x = 6$
- D. $x = 3$ (**bonne réponse**)

Justification : $\ln(x(x - 1)) = \ln 6 \iff x^2 - x - 6 = 0 \iff x = 3$ ou $x = -2$; seul $x = 3$ vérifie $x > 1$ (domaine de définition).

10. Dans l'exercice 8, quel est le plus petit entier n tel que $1,05^n \geq 2$?

- A. 14
- B. 2
- C. 20
- D. 15 (**bonne réponse**)

Justification : $n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2$: le plus petit entier est 15.