

Contrôle : chapitre 5, Fonction logarithme

Durée : 60 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Propriétés, équations et inéquations

1. Montrer que $A = \ln 18 + \ln 12 - \ln 27$ est égal à $3 \ln 2$. (1 point)
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x + 3) + \ln(x - 1) = \ln 5$. (2 points)
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(3x - 1) \leq 2$. (1,5 points)
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$. (1,5 points)

Exercice 2 (8 points) : Étude d'une fonction avec logarithme

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire l'existence d'asymptotes à $\mathcal{C}_f$. (2 points)
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$. (1 point)
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations complet de f . (1,5 points)
4. Résoudre $f(x) = 0$ puis en déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$. (1 point)
5. Soit k un réel. Discuter, suivant les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
On justifiera avec soin. (1,5 points)
6. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse e . (1 point)

Exercice 3 (6 points) : Une inégalité classique et un seuil

Partie A. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 - \ln x$.

Partie B. Une substance radioactive perd 6 % de sa masse chaque année. Sa masse initiale est de 80 g. On note m_n sa masse en grammes après n années, avec $m_0 = 80$.

Voici une fonction Python à compléter pour la question 5 :

```
def seuil():
    n = 0
    m = 80
    while ..... :
        n = .....
        m = .....
    return n
```

1. (**Partie A**) Étudier les variations de g et en déduire que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$. (1,5 points)

2. (**Partie A**) En appliquant l'inégalité précédente à $\frac{1}{x}$, montrer que $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$. (1,5 points)

3. (**Partie B**) Exprimer m_n en fonction de n . (0,5 point)

4. (**Partie B**) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $m_n < 20$. (1,5 points)

5. (**Partie B**) Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $m_n < 20$. (1 point)