

Contrôle : chapitre 5, Fonction logarithme

Durée : 60 minutes. **Calculatrice :** autorisée. **Barème :** 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (6 points) : Propriétés, équations et inéquations

1. Montrer que $A = \ln 18 + \ln 12 - \ln 27$ est égal à $3 \ln 2$. (1 point)
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x+3) + \ln(x-1) = \ln 5$. (2 points)
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(3x-1) \leq 2$. (1,5 points)
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$. (1,5 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1 point)

$18 = 2 \times 3^2$, $12 = 2^2 \times 3$ et $27 = 3^3$, donc :

$$A = (\ln 2 + 2 \ln 3) + (2 \ln 2 + \ln 3) - 3 \ln 3 = 3 \ln 2 + 3 \ln 3 - 3 \ln 3 = 3 \ln 2.$$

(Autre rédaction : $A = \ln \frac{18 \times 12}{27} = \ln 8 = \ln(2^3) = 3 \ln 2$.)

Barème : 0,5 point pour la décomposition en produits de puissances de 2 et 3 (ou le regroupement en un seul logarithme) ; 0,5 point pour l'application correcte des propriétés et la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (2 points)

Ensemble de définition. Il faut $x+3 > 0$ et $x-1 > 0$, c'est-à-dire $x > 1$. On résout donc sur $]1; +\infty[$.

Pour $x > 1$: $\ln(x+3) + \ln(x-1) = \ln 5 \iff \ln((x+3)(x-1)) = \ln 5 \iff (x+3)(x-1) = 5$ (car $\ln$ est strictement croissante).

Cela équivaut à $x^2 + 2x - 8 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4 + 32 = 36$, d'où $x = \frac{-2-6}{2} = -4$ ou $x = \frac{-2+6}{2} = 2$.

Or $-4 \notin]1; +\infty[$: cette valeur est rejetée, et $2 > 1$ convient.

$$S = \{2\}.$$

Barème : 0,5 point pour l'ensemble de définition ; 0,5 point pour la transformation en $(x + 3)(x - 1) = 5$; 0,5 point pour la résolution de l'équation du second degré ; 0,5 point pour le rejet de -4 et la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1,5 points)

Ensemble de définition. $3x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{3}$.

Pour $x > \frac{1}{3}$: $\ln(3x - 1) \leq 2 \iff \ln(3x - 1) \leq \ln(e^2) \iff 3x - 1 \leq e^2$ (car $\ln$ est strictement croissante, le sens est conservé), soit $x \leq \frac{1 + e^2}{3}$.

Comme $\frac{1 + e^2}{3} > \frac{1}{3}$, l'intersection avec $x > \frac{1}{3}$ est non vide.

$$S = \left] \frac{1}{3}; \frac{1 + e^2}{3} \right].$$

Barème : 0,5 point pour l'ensemble de définition ; 0,5 point pour l'équivalence avec $3x - 1 \leq e^2$ (croissance de $\ln$) ; 0,5 point pour l'ensemble solution avec les bons crochets.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (1,5 points)

On pose $X = e^x$; on a $X > 0$ et $e^{2x} = X^2$. L'équation devient $X^2 - 5X + 6 = 0$.

$\Delta = 25 - 24 = 1$ donc $X = \frac{5 - 1}{2} = 2$ ou $X = \frac{5 + 1}{2} = 3$. Les deux valeurs sont strictement positives.

$$e^x = 2 \iff x = \ln 2 \text{ et } e^x = 3 \iff x = \ln 3.$$

$$S = \{\ln 2; \ln 3\}.$$

Barème : 0,5 point pour le changement de variable $X = e^x$ et l'équation en X ; 0,5 point pour les valeurs de X et leur positivité ; 0,5 point pour le retour à x avec $\ln$.

Exercice 2 (8 points) : Étude d'une fonction avec logarithme

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire l'existence d'asymptotes à $\mathcal{C}_f$. (2 points)
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$. (1 point)
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations complet de f . (1,5 points)
4. Résoudre $f(x) = 0$ puis en déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$. (1 point)
5. Soit k un réel. Discuter, suivant les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$. On justifiera avec soin. (1,5 points)
6. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse e. (1 point)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (2 points)

En 0. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

En $+\infty$. Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$\mathcal{C}_f$ admet pour asymptotes la droite d'équation $x = 0$ (verticale) et la droite d'équation $y = 0$ en $+\infty$ (horizontale).

Barème : 0,5 point pour la limite en 0 justifiée (produit) ; 0,5 point pour la décomposition $\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$ et la limite en $+\infty$ avec les croissances comparées ; 0,5 point pour l'asymptote verticale ; 0,5 point pour l'asymptote horizontale.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1 point)

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 1 + \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$, v ne s'annulant pas sur $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

Barème : 0,5 point pour la formule de dérivation d'un quotient correctement appliquée ; 0,5 point pour le calcul menant à $-\frac{\ln x}{x^2}$.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (1,5 points)

Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$: $f'(x)$ est du signe de $-\ln x$.

$\ln x < 0$ pour $0 < x < 1$ donc $f'(x) > 0$ sur $]0; 1[$; $\ln x > 0$ pour $x > 1$ donc $f'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$; $f'(1) = 0$.

$$f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = 1.$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

f est strictement croissante sur $]0; 1]$, strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, et admet un maximum égal à 1 en $x = 1$.

Barème : 0,5 point pour le signe de f' justifié par le signe de $\ln x$; 0,5 point pour la valeur $f(1) = 1$; 0,5 point pour le tableau avec les limites.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1 point)

$$\text{Pour } x > 0, f(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$, $1 + \ln x < 0$ car $\ln$ est croissante et $\ln \frac{1}{e} = -1$; sur $\left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$, $1 + \ln x > 0$.

Comme $x > 0$, $f(x)$ a le signe de $1 + \ln x$.

$$f(x) < 0 \text{ sur } \left]0; \frac{1}{e}\right[, f\left(\frac{1}{e}\right) = 0 \text{ et } f(x) > 0 \text{ sur } \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[.$$

Barème : 0,5 point pour la solution $x = \frac{1}{e}$; 0,5 point pour le signe de f .

Correction de l'exercice 2, question 5

Question 5 (1,5 points)

Sur $]0; 1]$, f est continue et strictement croissante, et prend ses valeurs dans $] -\infty; 1]$ (limite $-\infty$ en 0, valeur 1 en 1). Sur $[1; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, et prend ses valeurs dans $]0; 1]$ (limite 0 en $+\infty$, valeur 1 en 1).

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone) :

- si $k > 1$: aucune solution (le maximum de f est 1) ;
- si $k = 1$: une seule solution, $x = 1$;
- si $0 < k < 1$: une solution dans $]0; 1[$ et une solution dans $]1; +\infty[$, soit **deux** solutions ;
- si $k \leq 0$: une solution dans $]0; 1[$ et aucune dans $[1; +\infty[$ où $f(x) > 0$, soit **une seule** solution.

Barème : 0,5 point pour l'application du théorème des valeurs intermédiaires avec continuité et stricte monotonie ; 0,5 point pour les cas $k > 1$ et $k = 1$; 0,5 point pour les cas $0 < k < 1$ et $k \leq 0$.

Correction de l'exercice 2, question 6

Question 6 (1 point)

$$f(e) = \frac{1 + \ln e}{e} = \frac{2}{e} \text{ et } f'(e) = -\frac{\ln e}{e^2} = -\frac{1}{e^2}.$$

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) = -\frac{1}{e^2}(x - e) + \frac{2}{e} = -\frac{x}{e^2} + \frac{1}{e} + \frac{2}{e}.$$

$$y = -\frac{x}{e^2} + \frac{3}{e}.$$

Barème : 0,5 point pour $f(e)$ et $f'(e)$; 0,5 point pour l'équation réduite.

Exercice 3 (6 points) : Une inégalité classique et un seuil

Partie A. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 - \ln x$.

Partie B. Une substance radioactive perd 6 % de sa masse chaque année. Sa masse initiale est de 80 g. On note m_n sa masse en grammes après n années, avec $m_0 = 80$.

Voici une fonction Python à compléter pour la question 5 :

```
def seuil():
    n = 0
    m = 80
    while ..... :
        n = .....
        m = .....
    return n
```

- (Partie A)** Étudier les variations de g et en déduire que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$. (1,5 points)
- (Partie A)** En appliquant l'inégalité précédente à $\frac{1}{x}$, montrer que $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$. (1,5 points)
- (Partie B)** Exprimer m_n en fonction de n . (0,5 point)
- (Partie B)** Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $m_n < 20$. (1,5 points)
- (Partie B)** Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $m_n < 20$. (1 point)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1,5 points)

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$: $g'(x) < 0$ sur $]0; 1[$ et $g'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.
Donc g est décroissante sur $]0; 1]$ puis croissante sur $[1; +\infty[$.

Elle admet donc un minimum en 1, égal à $g(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$.

Ainsi $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, c'est-à-dire $\ln x \leq x - 1$.

Barème : 0,5 point pour la dérivée et son signe ; 0,5 point pour le minimum $g(1) = 0$; 0,5 point pour la conclusion $\ln x \leq x - 1$.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1,5 points)

Pour $x > 0$, on a $\frac{1}{x} > 0$ donc $\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$, soit $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$, d'où $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Soit $n \geq 1$ entier. En prenant $x = 1 + \frac{1}{n} > 0$:

- dans $\ln x \leq x - 1$: $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$;
- dans $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$: $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

D'où $\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

Barème : 1 point pour la démonstration de $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ avec $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$; 0,5 point pour l'encadrement pour $x = 1 + \frac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (0,5 point)

Perdre 6 % revient à multiplier par $1 - 0,06 = 0,94$: $m_{n+1} = 0,94 m_n$. La suite (m_n) est géométrique de raison 0,94 et de premier terme 80.

$$m_n = 80 \times 0,94^n.$$

Barème : 0,5 point pour la raison 0,94 et la formule.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1,5 points)

$m_n < 20 \iff 80 \times 0,94^n < 20 \iff 0,94^n < 0,25 \iff n \ln 0,94 < \ln 0,25$ (croissance de $\ln$).

Comme $0,94 < 1$, on a $\ln 0,94 < 0$: on divise par ce nombre négatif en **changeant le sens** de l'inégalité :

$$n > \frac{\ln 0,25}{\ln 0,94} \approx 22,4.$$

Le plus petit entier convenable est $n = 23$ (la masse passe sous 20 g au bout de 23 ans).

Barème : 0,5 point pour l'inéquation $0,94^n < 0,25$ puis le passage au logarithme ; 0,5 point pour le changement de sens justifié par $\ln 0,94 < 0$; 0,5 point pour la valeur approchée et l'entier 23.

Correction de l'exercice 3, question 5

Question 5 (1 point)

```
def seuil():
    n = 0
    m = 80
    while m >= 20:
        n = n + 1
        m = 0.94 * m
    return n
```

La boucle continue tant que $m_n \geq 20$; à chaque passage, n augmente de 1 et m est multipliée par 0,94. L'appel `seuil()` renvoie 23, ce qui confirme le résultat de la question précédente.

Barème : 0,5 point pour la condition de boucle $m \geq 20$; 0,5 point pour les deux mises à jour $n = n + 1$ et $m = 0.94 * m$.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	6
Exercice 2	8
Exercice 3	6
Total	20