

Guide de rédaction : dérivation et convexité

Ce guide complète le Guide de rédaction général.

Il rassemble, pour le chapitre Dérivation et convexité, **les quatorze situations qui reviennent au bac** et, pour chacune, la rédaction modèle.

Les études de fonctions sont l'exercice le plus classique du bac : une rédaction propre y fait la différence entre un bon et un excellent résultat.

Le principe du chapitre

Avec la dérivation et la convexité, un correcteur regarde surtout **cinq choses** :

- la **dérivabilité justifiée** avant chaque dérivée ;
- la **formule citée** ;
- le **signe justifié facteur par facteur** ;
- le **tableau complet** (limites et valeurs) ;
- la **phrase de conclusion** qui traduit le résultat (variations, convexité, point d'inflexion, tangente).

1. Les quatorze situations et leur rédaction modèle

Situation 1 : justifier la dérivabilité.

« La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. »

Autres formes :

- « ... comme somme, quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur I » ;
- « ... comme composée de fonctions dérivables » ;
- « ... comme inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas ».

Pour une racine : « ... car $u(x) > 0$ sur I ».

Situation 2 : calculer une dérivée ($f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$).

« On applique $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$, $u'(x) = 2x + 1$, $v(x) = e^{-x}$ et $v'(x) = -e^{-x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x} = e^{-x}(x - x^2) = x(1 - x)e^{-x}$. »

Nomme u , u' , v , v' avant d'écrire le résultat : c'est ce qui fait apparaître les points au barème, et ce qui évite l'erreur de signe.

Situation 3 : dériver une composée.

« La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de $x \mapsto -x^2$ et de l'exponentielle. On applique $(e^u)' = u'e^u$ avec $u(x) = -x^2$, $u'(x) = -2x$. Pour tout x , $g'(x) = -2xe^{-x^2}$. »

Situation 4 : étudier le signe de la dérivée.

« Comme $e^{-x} > 0$ pour tout x , $f'(x)$ est du signe de $x(1-x)$, trinôme de racines 0 et 1 et de coefficient dominant négatif. Donc $f'(x) < 0$ sur $] -\infty; 0[$, $f'(x) > 0$ sur $]0; 1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$. »

Justifie **chaque facteur** : « $e^x > 0$ », « $(x-1)^2 \geq 0$ », « le dénominateur est strictement positif ».

Situation 5 : le tableau de variations.

Le tableau doit contenir :

- le domaine ;
- le signe de f' ;
- les flèches ;
- les **limites aux bornes** ;
- les **valeurs aux extremums**.

Puis la phrase : « La fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$, strictement croissante sur $[0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. Elle admet un minimum local 1 en 0 et un maximum local $\frac{3}{e}$ en 1. »

Situation 6 : l'équation d'une tangente.

« La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Ici $f(1) = e$ et $f'(1) = 2e$, donc la tangente a pour équation $y = e + 2e(x - 1)$, soit $y = 2ex - e$. »

Écris les **trois nombres** a , $f(a)$ et $f'(a)$ avant l'équation.

Situation 7 : la dérivée seconde et la convexité.

« La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. $f''(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$.

Comme $e^{-x} > 0$, $f''(x)$ est du signe de $x^2 - 3x + 1$, dont les racines sont $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Donc $f'' \geq 0$ sur $] -\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$: f est **convexe** sur ces intervalles. $f'' \leq 0$ sur $[x_1; x_2]$: f est **concave** sur cet intervalle. »

Situation 8 : le point d'inflexion.

« La fonction f'' s'annule en changeant de signe en 0. Donc le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0, c'est-à-dire $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$, est un point d'inflexion. »

« $f''(a) = 0$ » ne suffit pas : il faut le **changement de signe**. Et donne les **deux coordonnées**.

Situation 9 : déterminer des paramètres.

« La courbe passe par $A(0; 1)$: $f(0) = 1$, soit $b = 1$. La tangente en A est horizontale : $f'(0) = 0$, soit $a - b = 0$. Donc $a = b = 1$. »

Puis : « Vérification : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. »

Traduis chaque information de l'énoncé en **une équation**, et vérifie à la fin.

Situation 10 : une inégalité par fonction auxiliaire.

« Soit $g(x) = e^x - x - 1$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$.

Comme l'exponentielle est strictement croissante et $e^0 = 1$, $g'(x) < 0$ si $x < 0$ et $g'(x) > 0$ si $x > 0$.

Donc g admet un minimum en 0, égal à $g(0) = 0$.

Ainsi $g(x) \geq 0$ pour tout x , c'est-à-dire $e^x \geq 1 + x$. »

Situation 11 : une inégalité par convexité.

« La fonction f est deux fois dérivable sur I et $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} > 0$: f est convexe sur I .

Sa courbe est donc au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = 1 - x$.

Donc, pour tout $x > -1$, $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x$. »

Situation 12 : un problème d'optimisation.

« *Modélisation.* Le volume est $V(x) = x(30 - 2x)^2$ pour $x \in]0; 15[$.

Variations. V est dérivable et $V'(x) = 12(15 - x)(5 - x)$. Sur $]0; 15[$, $V'(x)$ est du signe de $5 - x$, donc V est croissante sur $]0; 5]$ et décroissante sur $[5; 15[$.

Conclusion. Le volume est maximal pour $x = 5$ cm et vaut $2\,000$ cm³. »

Trois ingrédients obligatoires : le **domaine**, le **tableau de variations**, la **conclusion en contexte avec l'unité**.

Situation 13 : lecture graphique.

« Sur la courbe de f' , on lit que f' est positive sur $] -\infty; -2[$ et négative sur $] -2; 1[$. Donc f est croissante sur $] -\infty; -2]$ et décroissante sur $[-2; 1]$. »

Pour une lecture sur f'' ou sur les variations de f' : « f' est croissante sur I , donc f est convexe sur I . »

Une lecture graphique se rédige **avec les théorèmes du cours**, pas avec « on voit que ».

Situation 14 : vrai/faux et contre-exemple.

« L'affirmation est **fausse**. Contre-exemple : $f(x) = x^4$, $f''(x) = 12x^2$ s'annule en 0 sans changer de signe, donc la courbe n'a pas de point d'inflexion en 0. »

2. Avant / après sur la dérivation et la convexité**a) Une dérivée et un signe.**

« $f'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x}$ donc f est croissante. »

« f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit. $f'(x) = x(1 - x)e^{-x}$.

Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x(1 - x)$.

Donc $f' < 0$ sur $] -\infty; 0[$, $f' > 0$ sur $]0; 1[$ et $f' < 0$ sur $]1; +\infty[$: f est décroissante, puis croissante, puis décroissante. »

Ce qui manque à la première : la dérivabilité, le résultat factorisé, le signe justifié, les intervalles.

b) Un point d'inflexion.

« $f''(0) = 0$ donc c'est un point d'inflexion. »

« f'' est négative sur $] -\infty; 0[$ et positive sur $]0; +\infty[$: elle s'annule en changeant de signe en 0.

Donc $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion. »

c) Une tangente.

« La tangente en 1 est $y = 2e(x - 1)$. »

« $f(1) = e$ et $f'(1) = 2e$. La tangente en 1 a pour équation $y = e + 2e(x - 1)$, soit $y = 2ex - e$. »

Il manquait $f(1)$: la tangente ne passait pas par le bon point.

d) Une inégalité.

« $e^x \geq 1 + x$ car la courbe de **exp** est au-dessus de sa tangente. »

« **exp** $'' = \text{exp} > 0$, donc l'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = 1 + x$. Donc $e^x \geq 1 + x$ pour tout x . »

3. Les erreurs de rédaction propres à ce chapitre

- Dériver sans justifier la **dérivabilité**.
- Oublier le facteur u' dans une composée.
- Étudier le signe d'une dérivée **non factorisée**, ou sans justifier chaque facteur.
- Un tableau de variations **sans limites** ni valeurs.
- Conclure à un **extremum** ou à un **point d'inflexion** sans changement de signe.
- Donner une tangente sans avoir calculé $f(a)$.
- Confondre **convexe** (au-dessus des tangentes) et **concave**.
- Confondre « f' croissante » (f convexe) et « f croissante ».
- En optimisation, oublier le **domaine**, la **conclusion en contexte** ou l'**unité**.

4. La check-list du chapitre Dérivation et convexité

- J'ai écrit la **phrase de dérivabilité** avant chaque dérivée.
- J'ai cité la **formule** et nommé u , u' , v , v' .
- Ma dérivée est **factorisée**, et j'ai justifié le **signe de chaque facteur**.
- Mon tableau contient les **limites** et les **valeurs aux extremums**.
- Pour la convexité, j'ai calculé f'' , étudié son signe et vérifié le **changement de signe** pour les inflexions, avec leurs deux coordonnées.
- Pour une tangente, j'ai écrit a , $f(a)$ et $f'(a)$ avant l'équation.
- Pour un problème, j'ai donné le **domaine**, le tableau et la **conclusion en contexte avec l'unité**.
- J'ai **vérifié ma dérivée** avec une valeur simple ($x = 0$ ou 1).

Une dérivée non factorisée, c'est une valise qu'on n'a pas fermée : tout dépasse, et personne ne s'y retrouve.