

Dérivation et convexité

Nom : _____

Fiche Standard

Date : _____

Exercice S1 : Une courbe en cloche

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{-x^2/2}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?
2. a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $0 < f(x) < \frac{2}{x}$ (on pourra utiliser l'inégalité $e^t \geq 1 + t$ avec $t = \frac{x^2}{2}$).
b) En déduire la limite de f en $+\infty$, puis en $-\infty$. Interpréter graphiquement.
3. Montrer que $f'(x) = (1 - x^2) e^{-x^2/2}$ et dresser le tableau de variations complet de f .
4. Montrer que $f''(x) = x(x^2 - 3) e^{-x^2/2}$. Étudier la convexité de f et déterminer les coordonnées des points d'inflexion de $\mathcal{C}$.
5. Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et T .

Exercice S2 : Détermination de paramètres, solutions d'une équation, algorithme

Soit $f(x) = (ax + b) e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$, où a et b sont deux réels. Sa courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(0; 2)$ et admet en A une tangente de coefficient directeur -1 .

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b , puis montrer que $a = 1$ et $b = 2$.

Dans la suite, $f(x) = (x + 2) e^{-x}$.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions, notées α et β avec $\alpha < \beta$, et que $\alpha \in]-2; -1[$ et $\beta \in]1; 2[$.
5. On souhaite encadrer β par dichotomie à l'aide du programme suivant.

```
from math import exp

def f(x):
    return (x + 2) * exp(-x)

def dichotomie(a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(m) > 1:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b
```

- a) Pourquoi, si $f(m) > 1$, la solution β est-elle dans $[m; b]$?
- b) Pour l'appel `dichotomie(1, 2, 0.001)`, donner les valeurs de `a` et `b` après les trois premiers passages dans la boucle (on donne $f(1,5) \approx 0,781$, $f(1,25) \approx 0,931$ et $f(1,125) \approx 1,015$).
- c) Combien de passages dans la boucle sont effectués au total ?

Exercice S3 : Optimisation : la boîte de conserve

Un fabricant produit des boîtes cylindriques de contenance 1 litre, soit $1\,000\text{ cm}^3$. On note r le rayon de base (en cm) et h la hauteur (en cm). On souhaite minimiser l'aire totale S de métal (deux disques et la paroi latérale, sans chute).

1. Exprimer h en fonction de r , puis montrer que $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ pour $r > 0$.
2. Montrer que $S'(r) = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}$ et étudier le signe de S' . On note r_0 le réel strictement positif tel que $\pi r_0^3 = 500$.
3. Dresser le tableau de variations de S sur $]0; +\infty[$.
4. Calculer $S''(r)$ et en déduire que S est convexe sur $]0; +\infty[$. Retrouver alors que $S(r_0)$ est le minimum de S en utilisant la position de la courbe par rapport à sa tangente en r_0 .
5. Montrer que, pour $r = r_0$, on a $h = 2r_0$. Donner les valeurs approchées de r_0 , h et $S(r_0)$ à 0,01 près, puis conclure en contexte.
6. Comparer avec une boîte de rayon 4 cm : calculer son aire (à 0,1 cm² près) et l'économie relative de métal obtenue avec la boîte optimale.

Exercice S4 : Point d'inflexion imposé

Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ où a et b sont deux réels. Sa courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse 1, et la tangente en ce point a pour coefficient directeur -3 .

1. Calculer f' et f'' . Montrer que $a = -3$ et $b = 0$.

Dans la suite, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

2. Dresser le tableau de variations de f (limites comprises).
3. Étudier la convexité de f . Donner les coordonnées du point d'inflexion I et l'équation de la tangente T en I .
4. Montrer que $f(x) - (-3x + 2) = (x - 1)^3$. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T .
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles et les situer entre deux entiers consécutifs.

Exercice S5 : Une inégalité qui donne une limite

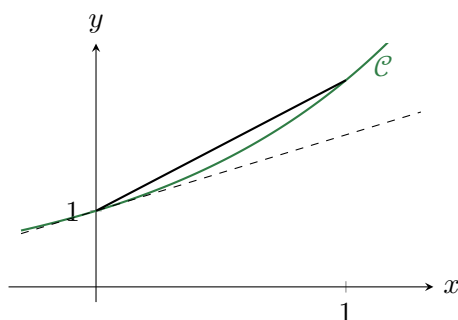
1. Montrer que, pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$ (au choix : par la convexité de l'exponentielle, ou en étudiant une fonction auxiliaire).
2. On pose $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$. Calculer $g'(x)$, montrer que g est croissante sur $[0; +\infty[$, puis que $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
3. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, puis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$.
4. Écrire $x^2 e^{-x} = (x e^{-x/2})^2$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$.

Exercice S6 : Concavité de la racine carrée et suite

1. Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$ sur $] -1; +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis montrer que f est concave.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en 0. En déduire que, pour tout $x > -1$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$. En appliquant l'inégalité précédente avec $x = \frac{1}{n^2}$, montrer que $0 < v_n \leq \frac{1}{2n}$.
4. En déduire la limite de (v_n) , puis un entier N tel que $v_n \leq 10^{-3}$ pour tout $n \geq N$.

Exercice S7 : Encadrer $\sqrt{e}$ avec une tangente et une corde

On note $\mathcal{C}$ la courbe de l'exponentielle. La tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0 est tracée en tirets ; la corde joignant les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses 0 et 1 est le segment en trait plein.



1. Rappeler pourquoi $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x .
2. On rappelle que f est convexe sur I si, pour tous $a, b \in I$ et tout $\lambda \in [0; 1]$, $f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$. En l'appliquant à l'exponentielle avec $a = 0$ et $b = 1$, montrer que $e^\lambda \leq 1 + (e - 1)\lambda$ pour tout $\lambda \in [0; 1]$.
3. En déduire que $1,5 \leq \sqrt{e} \leq 1,86$ (on admet $e < 2,72$).
4. De même, justifier que la racine carrée est concave sur $[1; 4]$, que $\sqrt{x} \geq \frac{x + 2}{3}$ sur $[1; 4]$ (corde entre les points d'abscisses 1 et 4), puis en déduire un encadrement de $\sqrt{2}$ à l'aide de cette corde et de la tangente en 1.

Exercice S8 : Fonction rationnelle et nombre de solutions

Soit $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Vérifier que $f(x) = 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$. En déduire les limites de f en $\pm\infty$ et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = 1$.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Discuter, selon la valeur du réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
4. Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point $A(0; 1)$. Montrer que $f(x) - (x + 1) = \frac{-x^3}{x^2 + 1}$. En déduire que $\mathcal{C}$ traverse T en A : de quel type de point s'agit-il ?

Exercice S9 : Une fonction trigonométrique

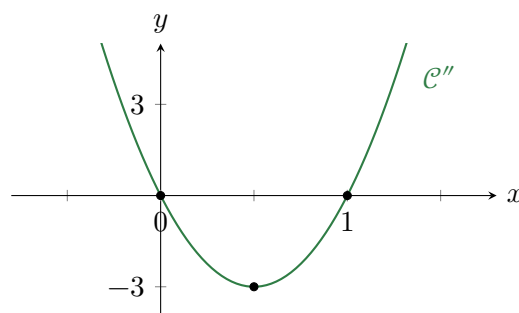
Soit $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est impaire et 2π -périodique. Pourquoi peut-on limiter l'étude à $[0; \pi]$?
2. Montrer que $f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$ pour tout réel x (on rappelle $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$).
3. Étudier le signe de f' sur $[0; \pi]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. En déduire que, pour tout réel x , $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
5. Montrer que $f'(\pi) = 0$ mais que f n'admet pas d'extremum local en π (on étudiera le signe de f' sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$).

Exercice S10 : Esquisser une courbe à partir de f' et de f''

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie A. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}''$ de la fonction f'' .



1. Lire le signe de f'' . En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe, ceux sur lesquels elle est concave, et les abscisses des points d'inflexion de sa courbe $\mathcal{C}$.

Partie B. On donne le tableau de variations de f' . On sait de plus que $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$ et que $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	-2	$+\infty$

2. Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}$ et en déduire le tableau de variations de f .
3. Quelle est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 ? Cette tangente traverse-t-elle la courbe ? Quelle est la nature du point d'abscisse 0 ?
4. Quelle est la pente de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 ?
5. Esquisser l'allure de $\mathcal{C}$ en plaçant les points d'abscisses 0, 1 et $\frac{3}{2}$, leurs tangentes, et en respectant les variations et la convexité.