

Corrigé : Dérivation et convexité

Fiche Standard

S1.

- Pour tout réel x , $f(-x) = -x e^{-x^2/2} = -f(x)$: f est impaire. Conclusion : $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- a) Pour $x > 0$, $f(x) = x e^{-x^2/2} > 0$. Avec $t = \frac{x^2}{2}$: $e^{x^2/2} \geq 1 + \frac{x^2}{2} > \frac{x^2}{2}$, donc, en passant à l'inverse (nombres positifs), $e^{-x^2/2} < \frac{2}{x^2}$ et $f(x) < x \times \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x}$. Conclusion : $0 < f(x) < \frac{2}{x}$ pour tout $x > 0$.
b) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Par imparité, $f(x) = -f(-x)$ et $-x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Conclusion : l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables. Avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x^2/2}$, $v'(x) = -x e^{-x^2/2}$: $f'(x) = e^{-x^2/2} - x^2 e^{-x^2/2} = (1 - x^2) e^{-x^2/2}$. Comme $e^{-x^2/2} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$. On a $f(1) = e^{-1/2}$ et $f(-1) = -e^{-1/2}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
f	0	$\searrow$	$-e^{-1/2}$	$\nearrow$	$e^{-1/2}$	$\searrow$	0

- f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = 1 - x^2$, $u'(x) = -2x$ et $v(x) = e^{-x^2/2}$: $f''(x) = -2x e^{-x^2/2} - x(1 - x^2) e^{-x^2/2} = (x^3 - 3x) e^{-x^2/2} = x(x^2 - 3) e^{-x^2/2}$. Le signe de f'' est celui de $x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Conclusion : f est concave sur $]-\infty; -\sqrt{3}]$ et sur $[0; \sqrt{3}]$, convexe sur $[-\sqrt{3}; 0]$ et sur $[\sqrt{3}; +\infty[$. f'' s'annule en changeant de signe en $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$: $\mathcal{C}$ a trois points d'inflexion, $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}e^{-3/2})$, $(0; 0)$ et $(\sqrt{3}; \sqrt{3}e^{-3/2})$.

- $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$: T a pour équation $y = x$. Pour tout réel x , $f(x) - x = x(e^{-x^2/2} - 1)$. Pour $x \neq 0$, $-\frac{x^2}{2} < 0$ donc $e^{-x^2/2} < 1$: le second facteur est strictement négatif. Le signe de $f(x) - x$ est donc l'opposé de celui de x . Conclusion : $\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur $]-\infty; 0[$ et en dessous sur $]0; +\infty[$; elle traverse T en O , point d'inflexion.

S2.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = a e^{-x} - (ax + b) e^{-x} = (a - b - ax) e^{-x}$. $A(0; 2) \in \mathcal{C}$ donne $f(0) = b = 2$. La pente en A est $f'(0) = a - b = -1$, donc $a = b - 1 = 1$. Conclusion : $a = 1$ et $b = 2$.
- En $+\infty$: $f(x) = x e^{-x} + 2 e^{-x}$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. En $-\infty$: $x + 2 \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- $f'(x) = (1 - 2 - x) e^{-x} = -(x + 1) e^{-x}$, du signe de $-(x + 1)$. On a $f(-1) = e$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	e	0

4. Sur $] -\infty; -1]$, f est continue et strictement croissante, de $-\infty$ à e , et $1 \in] -\infty; e]$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 1$ y a une unique solution α . Comme $f(-2) = 0 < 1 < e = f(-1)$, on a $\alpha \in] -2; -1[$. Sur $[-1; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, de e à 0 (limite non atteinte), et $1 \in]0; e]$: une unique solution β . Comme $f(1) = 3e^{-1} \approx 1,10 > 1 > f(2) = 4e^{-2} \approx 0,54$, on a $\beta \in]1; 2[$. *Conclusion : l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions $\alpha \in] -2; -1[$ et $\beta \in]1; 2[$.*
5. a) Sur $[1; 2] \subset [-1; +\infty[$, f est strictement décroissante et $f(\beta) = 1$. Si $f(m) > 1 = f(\beta)$, alors $m < \beta$, donc $\beta \in]m; b]$: le programme remplace **a** par **m**.
- b) Départ : $a = 1, b = 2$. Passage 1 : $m = 1,5$, $f(m) \approx 0,781 \leq 1$ donc $b = 1,5 : [1; 1,5]$. Passage 2 : $m = 1,25$, $f(m) \approx 0,931 \leq 1$ donc $b = 1,25 : [1; 1,25]$. Passage 3 : $m = 1,125$, $f(m) \approx 1,015 > 1$ donc $a = 1,125$. *Conclusion : après trois passages, $a = 1,125$ et $b = 1,25$.*
- c) Après k passages, $b - a = \frac{1}{2^k}$. La boucle s'arrête dès que $\frac{1}{2^k} \leq 0,001$, soit $2^k \geq 1000$. Or $2^9 = 512 < 1000 \leq 1024 = 2^{10}$. *Conclusion : 10 passages sont effectués ; l'intervalle final a pour amplitude $\frac{1}{1024} \approx 0,00098$.*

S3.

1. Le volume du cylindre vaut $\pi r^2 h = 1000$, donc $h = \frac{1000}{\pi r^2}$. L'aire est $S = 2 \times \pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{1000}{\pi r^2}$. *Conclusion : $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ pour $r > 0$.*
2. $S'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}$. Le dénominateur est positif et $4\pi r^3 - 2000 \geq 0 \iff \pi r^3 \geq 500 \iff r \geq r_0$ où $r_0 = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3}$ (racine cubique). *Conclusion : $S'(r) < 0$ sur $]0; r_0[$, $S'(r_0) = 0$ et $S'(r) > 0$ sur $]r_0; +\infty[$.*
3. $\lim_{r \rightarrow 0^+} S(r) = +\infty$ (car $\frac{2000}{r} \rightarrow +\infty$) et $\lim_{r \rightarrow +\infty} S(r) = +\infty$.

r	0	r_0	$+\infty$
$S'(r)$		$-$	0
S	$+\infty$	$S(r_0)$	$+\infty$

4. $S''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0$ sur $]0; +\infty[$: S est convexe. La tangente à la courbe de S en r_0 est horizontale (car $S'(r_0) = 0$), d'équation $y = S(r_0)$. Une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes : *Conclusion : $S(r) \geq S(r_0)$ pour tout $r > 0$; $S(r_0)$ est le minimum de S .*
5. De $\pi r_0^3 = 500$ on tire $h = \frac{1000}{\pi r_0^2} = \frac{2\pi r_0^3}{\pi r_0^2} = 2r_0$. De plus $\frac{2000}{r_0} = \frac{4\pi r_0^3}{r_0} = 4\pi r_0^2$, donc $S(r_0) = 6\pi r_0^2$. Numériquement : $r_0 \approx 5,42$ cm, $h \approx 10,84$ cm et $S(r_0) \approx 553,58$ cm². *Conclusion : l'aire de métal est minimale pour un rayon d'environ 5,42 cm et une hauteur d'environ 10,84 cm (hauteur égale au diamètre) ; elle vaut environ 553,58 cm².*

6. Pour $r = 4$: $S(4) = 32\pi + 500 \approx 600,5 \text{ cm}^2$ (avec $h \approx 19,89 \text{ cm}$). L'économie est $\frac{S(4) - S(r_0)}{S(4)} \approx \frac{600,53 - 553,58}{600,53} \approx 0,078$. Conclusion : la boîte optimale économise environ 7,8 % de métal par rapport à la boîte de rayon 4 cm.

S4.

1. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ et $f''(x) = 6x + 2a$. Un point d'inflexion en 1 impose $f''(1) = 0$: $6 + 2a = 0$, donc $a = -3$. La pente -3 donne $f'(1) = 3 + 2a + b = -3$, soit $b = -3 - 3 + 6 = 0$. Conclusion : $a = -3$ et $b = 0$. Vérification : pour $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f''(x) = 6(x - 1)$ change de signe en 1.
2. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$: positif sur $] -\infty ; 0]$, négatif sur $[0 ; 2]$, positif sur $[2 ; +\infty[$. $f(0) = 1$, $f(2) = -3$. En $\pm\infty$, $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$ a la limite de x^3 .

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

3. $f''(x) = 6(x - 1)$: négatif sur $] -\infty ; 1]$, positif sur $[1 ; +\infty[$. On a $f(1) = -1$ et $f'(1) = -3$. La tangente en I a pour équation $y = -1 - 3(x - 1)$. Conclusion : f est concave sur $] -\infty ; 1]$, convexe sur $[1 ; +\infty[$; $I(1 ; -1)$ est un point d'inflexion et $T : y = -3x + 2$.
4. $f(x) - (-3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$ (identité remarquable). Ce nombre est négatif pour $x < 1$ et positif pour $x > 1$. Conclusion : $\mathcal{C}$ est en dessous de T sur $] -\infty ; 1[$ et au-dessus sur $]1 ; +\infty[$; elle traverse T en I , ce qui confirme le point d'inflexion.
5. Sur chaque intervalle de stricte monotonie, f est continue : sur $] -\infty ; 0]$, f croît de $-\infty$ à 1 ; $0 \in] -\infty ; 1]$ donc une solution, et $f(-1) = -3 < 0 < 1 = f(0)$ la place dans $] -1 ; 0[$; sur $[0 ; 2]$, f décroît de 1 à -3 : une solution, et $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$ la place dans $]0 ; 1[$; sur $[2 ; +\infty[$, f croît de -3 à $+\infty$: une solution, et $f(2) = -3 < 0 < 1 = f(3)$ la place dans $]2 ; 3[$. Conclusion : $f(x) = 0$ a exactement trois solutions, dans $] -1 ; 0[$, $]0 ; 1[$ et $]2 ; 3[$ (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires).

S5.

1. L'exponentielle est deux fois dérivable et $\exp'' = \exp > 0$: elle est convexe sur $\mathbb{R}$, donc au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = 1 + x$. Conclusion : $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x . (Autre méthode : $h(x) = e^x - 1 - x$ a pour dérivée $e^x - 1$, négative sur $] -\infty ; 0]$ et positive ensuite ; son minimum est $h(0) = 0$.)
2. $g'(x) = e^x - 1 - x \geq 0$ d'après la question 1 : g est croissante sur $[0 ; +\infty[$. Comme $g(0) = 1 - 1 = 0$, on a $g(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Conclusion : $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.
3. Pour $x > 0$: $\frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} \geq \frac{x}{2}$. Comme $\frac{x}{2} \rightarrow +\infty$, la comparaison donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Pour $x > 0$, $x e^{-x} = \frac{1}{e^x/x}$: par passage à l'inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$.
4. Posons $X = \frac{x}{2}$; quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$ et $x e^{-x/2} = 2X e^{-X} \rightarrow 0$ d'après la question 3. Par composition puis par carré, $(x e^{-x/2})^2 \rightarrow 0$. Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.

S6.

1. Sur $] -1 ; +\infty[$, $1 + x > 0$. Avec $u(x) = 1 + x$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$, puis $f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$ (dérivée de $\frac{1}{2}u^{-1/2}$: $-\frac{1}{4}u^{-3/2}$). Comme $f''(x) < 0$ sur $] -1 ; +\infty[$, f est concave.

Autre rédaction : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ est décroissante (inverse d'une fonction croissante positive).

2. $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$: la tangente en 0 a pour équation $y = 1 + \frac{x}{2}$. Une fonction concave est en dessous de ses tangentes. *Conclusion* : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ pour tout $x > -1$.
3. Avec $x = \frac{1}{n^2} > 0$: $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \leq 1 + \frac{1}{2n^2}$. Or $\sqrt{n^2 + 1} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$ (car $n > 0$), donc $\sqrt{n^2 + 1} \leq n + \frac{1}{2n}$ et $v_n \leq \frac{1}{2n}$. De plus $n^2 + 1 > n^2$ donne $\sqrt{n^2 + 1} > n$ (la racine est strictement croissante), donc $v_n > 0$. *Conclusion* : $0 < v_n \leq \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geq 1$.
4. Comme $\frac{1}{2n} \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. De plus $\frac{1}{2n} \leq 10^{-3} \iff n \geq 500$. *Conclusion* : (v_n) converge vers 0 et $N = 500$ convient : $v_n \leq 10^{-3}$ pour tout $n \geq 500$.

S7.

1. L'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ ($\exp'' = \exp > 0$) ; sa courbe est donc au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = 1 + x$: $e^x \geq 1 + x$.
2. Avec $a = 0$ et $b = 1$, $(1 - \lambda)a + \lambda b = \lambda$; l'inégalité de convexité s'écrit $e^\lambda \leq (1 - \lambda)e^0 + \lambda e^1$. *Conclusion* : $e^\lambda \leq 1 + (e - 1)\lambda$ pour tout $\lambda \in [0; 1]$ (la courbe est sous la corde).
3. Avec $\lambda = \frac{1}{2}$, $\sqrt{e} = e^{1/2}$: la question 1 donne $\sqrt{e} \geq 1 + \frac{1}{2} = 1,5$ et la question 2 donne $\sqrt{e} \leq 1 + \frac{e - 1}{2} = \frac{1 + e}{2} < \frac{3,72}{2} = 1,86$. *Conclusion* : $1,5 \leq \sqrt{e} \leq 1,86$. (Valeur réelle : $\approx 1,6487$.)
4. $g(x) = \sqrt{x}$ vérifie $g''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$ sur $[1; 4]$: g est concave. La corde joignant $(1; 1)$ et $(4; 2)$ a pour pente $\frac{1}{3}$ et pour équation $y = 1 + \frac{x - 1}{3} = \frac{x + 2}{3}$. Une fonction concave est au-dessus de ses cordes sur l'intervalle : $\sqrt{x} \geq \frac{x + 2}{3}$ sur $[1; 4]$. La tangente en 1 est $y = \frac{x + 1}{2}$ et g est en dessous. Pour $x = 2$: *Conclusion* : $\frac{4}{3} \leq \sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$. (Valeur réelle : $\approx 1,4142$.)

S8.

1. $1 + \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 + x}{x^2 + 1} = f(x)$. Comme $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1/x}{1 + 1/x^2} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$. Le signe de $f(x) - 1 = \frac{x}{x^2 + 1}$ est celui de x (dénominateur strictement positif). *Conclusion* : la droite $\Delta : y = 1$ est asymptote horizontale ; $\mathcal{C}$ est en dessous de Δ pour $x < 0$, au-dessus pour $x > 0$, et la coupe en $A(0; 1)$.
2. $f'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 1) - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$, du signe de $1 - x^2$. On a $f(-1) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{3}{2}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0
f	$1 \searrow \frac{1}{2} \nearrow \frac{3}{2} \searrow 1$			

3. On étudie les valeurs prises sur chaque intervalle de monotonie (la fonction est continue) : sur $]-\infty; -1]$: f décroît, et prend toutes les valeurs de $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$ (la valeur 1 n'est pas atteinte, c'est la limite) ; sur $[-1; 1]$: f croît et prend toutes les valeurs de $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$, chacune une fois ; sur $[1; +\infty[$: f décroît et prend toutes les valeurs de $]1; \frac{3}{2}]$. *Conclusion* : pour $m < \frac{1}{2}$ ou $m > \frac{3}{2}$: aucune

solution ; pour $m = \frac{1}{2}$, $m = 1$ ou $m = \frac{3}{2}$: une seule solution (respectivement -1 , 0 et 1) ; pour $m \in \left] \frac{1}{2} ; 1 \right[$ ou $m \in \left] 1 ; \frac{3}{2} \right[$: exactement deux solutions.

4. $f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$: T a pour équation $y = x + 1$. Ensuite

$$f(x) - (x + 1) = \frac{x^2 + x + 1 - (x + 1)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + x + 1 - x^3 - x^2 - x - 1}{x^2 + 1} = \frac{-x^3}{x^2 + 1}.$$

Ce quotient est positif pour $x < 0$ et négatif pour $x > 0$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de T avant A et en dessous après. Conclusion : $\mathcal{C}$ traverse T en A , qui est donc un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

S9.

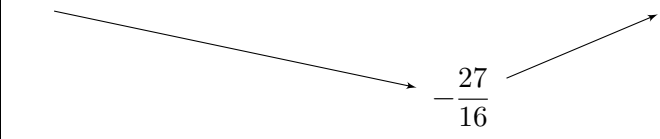
1. $f(-x) = \sin(-x) + \frac{1}{2} \sin(-2x) = -f(x)$: f est impaire. $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \frac{1}{2} \sin(2x + 4\pi) = f(x)$: f est 2π -périodique. Conclusion : il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$: on en déduit l'étude sur $[-\pi; \pi]$ par symétrie centrale de centre O , puis sur $\mathbb{R}$ par translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}$.
2. $f'(x) = \cos x + \frac{1}{2} \times 2 \cos(2x) = \cos x + \cos 2x = \cos x + 2 \cos^2 x - 1$. Or $(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 2 \cos^2 x + 2 \cos x - \cos x - 1 = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$. Conclusion : $f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$.
3. Sur $[0; \pi]$, $\cos x + 1 \geq 0$, nul seulement en π . Par ailleurs $2 \cos x - 1 \geq 0 \iff \cos x \geq \frac{1}{2} \iff x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. On a $f(0) = f(\pi) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

4. Sur $[0; \pi]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (minimum 0 et maximum $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ d'après le tableau). Sur $[-\pi; 0]$, $f(x) = -f(-x)$ avec $-x \in [0; \pi]$: $-\frac{3\sqrt{3}}{4} \leq f(x) \leq 0$. Ainsi $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$ sur $[-\pi; \pi]$, intervalle de longueur 2π , donc sur $\mathbb{R}$ par périodicité.
5. $f'(\pi) = (2 \cos \pi - 1)(\cos \pi + 1) = (-3) \times 0 = 0$. Sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$, $\cos x \leq \frac{1}{2}$ donc $2 \cos x - 1 \leq 0$, et $\cos x + 1 \geq 0$: $f' \leq 0$ sur tout cet intervalle, qui contient π en son intérieur. Conclusion : f' s'annule en π sans changer de signe ; f est décroissante au voisinage de π et n'admet pas d'extremum local en π .

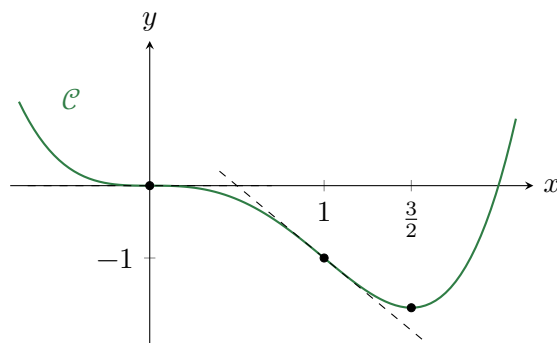
S10.

1. La parabole $\mathcal{C}''$ est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x < 0$ et $x > 1$, et en dessous pour $0 < x < 1$ ($f''(0) = f''(1) = 0$). Conclusion : $f'' \geq 0$ sur $] -\infty; 0]$ et sur $[1; +\infty[$, donc f est convexe sur ces intervalles ; $f'' \leq 0$ sur $[0; 1]$, donc f est concave sur $[0; 1]$. Le signe de f'' change en 0 et en 1 : les points d'abscisses 0 et 1 sont des points d'inflexion.
2. Sur $] -\infty; 0]$, f' est strictement croissante et $f'(0) = 0$: $f'(x) < 0$ pour $x < 0$. Sur $[0; 1]$, f' est décroissante de 0 à -2 : $f'(x) < 0$ pour $0 < x \leq 1$. Sur $[1; +\infty[$, f' est strictement croissante de -2 à $+\infty$ et s'annule en $\frac{3}{2}$: $f' < 0$ sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ et $f' > 0$ sur $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	0	$+$
$f(x)$				

Conclusion : f est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{3}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$; elle admet un minimum $-\frac{27}{16}$ atteint en $\frac{3}{2}$.

- $f'(0) = 0$: la tangente en $O(0;0)$ est l'axe des abscisses (horizontale). Comme f'' change de signe en 0, la courbe traverse cette tangente : le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion à tangente horizontale (c'est un point de la courbe où f' s'annule sans changer de signe, donc sans extremum).
- La pente est $f'(1) = -2$; la tangente au point $(1; -1)$ a pour équation $y = -2x + 1$. Elle traverse aussi la courbe (point d'inflexion).
- Allure de $\mathcal{C}$ (exemple de la fonction $x \mapsto x^4 - 2x^3$, qui vérifie toutes les données) :



La courbe est convexe, puis concave entre les points d'inflexion d'abscisses 0 et 1, puis convexe ; elle est décroissante jusqu'au minimum en $\frac{3}{2}$, puis croissante.