

Dérivation et convexité**Fiche Défi**

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Démonstration du cours : position par rapport aux tangentes

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I telle que $f'' \geq 0$ sur I . Soit $a \in I$. On pose, pour $x \in I$, $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$.

1. Calculer $g(a)$ et $g'(x)$.
2. Justifier que f' est croissante sur I . En déduire le signe de $g'(x)$ selon que $x \leq a$ ou $x \geq a$.
3. Dresser le tableau de variations de g et conclure que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ pour tout $x \in I$.
4. *Application.* Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que $x \mapsto (1+x)^n$ est convexe sur $] -1; +\infty[$, puis que $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour tout $x > -1$. En déduire que $1,01^{100} \geq 2$ et la limite de la suite $(1,01^n)$.

Exercice D2 : Moyenne de trois exponentielles

Soient a, b, c trois réels et $m = \frac{a+b+c}{3}$.

1. Donner l'équation de la tangente à la courbe de l'exponentielle au point d'abscisse m . En déduire que, pour tout réel x , $e^x \geq e^m(1+x-m)$.
2. En appliquant cette inégalité à a, b et c , montrer que $e^m \leq \frac{e^a + e^b + e^c}{3}$.
3. Étudier les variations de $\varphi(x) = e^x - e^m(1+x-m)$ et en déduire que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \neq m$. Montrer que l'inégalité de la question 2 est une égalité si et seulement si $a = b = c$.
4. Soient x et y deux réels. Montrer que $e^x + e^y + e^{-x-y} \geq 3$ et préciser quand il y a égalité.

Exercice D3 : Tangentes à l'exponentielle issues d'un point de l'axe des ordonnées

On note $\mathcal{C}$ la courbe de l'exponentielle. Pour tout réel a , on note T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a .

1. Montrer que T_a a pour équation $y = e^a(x+1-a)$. Son ordonnée à l'origine est donc $\varphi(a) = (1-a)e^a$.
2. Soit q un réel et $M(0; q)$. Justifier que le nombre de tangentes à $\mathcal{C}$ passant par M est égal au nombre de solutions de l'équation $\varphi(a) = q$ (on remarquera que deux valeurs distinctes de a donnent deux tangentes distinctes).
3. Étudier les variations de φ et ses limites en $-\infty$ (on admet $\lim_{a \rightarrow -\infty} a e^a = 0$) et en $+\infty$.
4. Discuter, selon les valeurs de q , le nombre de tangentes à $\mathcal{C}$ passant par $M(0; q)$. Interpréter pour les points situés au-dessus de $\mathcal{C}$ sur l'axe des ordonnées.
5. Déterminer la tangente à $\mathcal{C}$ passant par l'origine O . Pour $q = \frac{1}{2}$, montrer qu'il existe deux tangentes passant par M , dont les points de contact ont pour abscisses $a_1 \in]-2; -1[$ et $a_2 \in]0; 1[$.

Exercice D4 : Type bac : une fonction, une inégalité, une suite

Partie A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{1-x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f . Préciser le point d'inflexion de $\mathcal{C}$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0. Montrer que $f(x) \leq e x$ pour tout réel x . Peut-on en conclure que f est concave sur $\mathbb{R}$?
5. Montrer que, pour tout réel x , $x \leq e^{x-1}$, de deux manières : à l'aide du maximum de f , puis à l'aide de la convexité de l'exponentielle.

Partie B. On définit la suite (u_n) par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n .

1. Montrer par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout entier n .
2. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-u_n}$, puis que (u_n) est croissante.

- Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ et que $\ell = 1$.
- Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il renvoie le plus petit entier n tel que $1 - u_n < \varepsilon$. Quelle valeur renvoie `seuil(1e-6)` ?

```
from math import exp
```

```
def seuil(eps):
    u = 0.5
    n = 0
    while ..... :
        u = .....
        n = n + 1
    return n
```

Exercice D5 : Une famille de courbes et ses points d'inflexion

Pour tout réel m , on définit $f_m(x) = x^4 + mx^3$ sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe.

- Calculer $f'_m(x)$ et $f''_m(x)$ sous forme factorisée.
- Combien $\mathcal{C}_m$ a-t-elle de points d'inflexion selon la valeur de m ? Pour $m \neq 0$, les nommer I (d'abscisse 0) et J et donner leurs coordonnées en fonction de m .
- Pour $m \neq 0$, donner les équations des tangentes T_I et T_J à $\mathcal{C}_m$ en I et en J .
- Montrer que $f_m(x) - T_J(x) = \left(x + \frac{m}{2}\right)^3 \left(x - \frac{m}{2}\right)$, où $T_J(x)$ désigne l'ordonnée du point d'abscisse x de T_J . En déduire que T_J recoupe $\mathcal{C}_m$ en un unique autre point K , dont on donnera les coordonnées, et la position de $\mathcal{C}_m$ par rapport à T_J .
- Lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$, montrer que les points J appartiennent à une même courbe d'équation $y = -x^4$ et que les points K appartiennent à une courbe d'équation $y = 3x^4$.

Exercice D6 : Composition et convexité

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $h = e^f$.

- Montrer que $h'' = (f'' + (f')^2)e^f$. En déduire que si f est convexe sur I , alors h est convexe sur I .
- Montrer que $x \mapsto e^{x^2}$ est convexe sur $\mathbb{R}$, puis que $e^{x^2} \geq e(2x - 1)$ pour tout réel x .
- On considère $h(x) = e^{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$. Montrer que $h''(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{4x\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$. Étudier la convexité de h . Que dire de la réciproque de la question 1 ?
- Donner l'équation de la tangente T à la courbe de h au point d'abscisse 1. Préciser, sans calcul supplémentaire, la position de la courbe par rapport à T sur $]0; 1]$ puis sur $[1; +\infty[$. En déduire $e^{\sqrt{2}} \geq \frac{3e}{2}$ et $e^{1/2} \leq \frac{5e}{8}$.

Exercice D7 : Méthode de Newton pour $\sqrt{2}$

Soit $f(x) = x^2 - 2$ sur $]0; +\infty[$. Pour $a > 0$, on note T_a la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a et $g(a)$ l'abscisse de son point d'intersection avec l'axe des abscisses.

- Montrer que T_a a pour équation $y = 2a(x - g(a))$ avec $g(a) = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a}\right)$.
- Justifier que f est convexe. En évaluant l'inégalité « courbe au-dessus de la tangente » en $x = \sqrt{2}$, montrer que $g(a) \geq \sqrt{2}$ pour tout $a > 0$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

- Montrer que, pour tout n , $u_n \geq \sqrt{2}$, que (u_n) est décroissante, puis qu'elle converge vers $\sqrt{2}$.
- On pose $e_n = u_n - \sqrt{2}$. Montrer que $e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2u_n}$ et que $e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2}$. En déduire que $e_5 < 10^{-10}$ (on admet $e_0 < 0,6$).
- Écrire une fonction Python `newton(n)` qui renvoie u_n . Donner u_1 , u_2 et u_3 sous forme de fractions.