

Corrigé : Dérivation et convexité

Fiche Défi

D1.

1. $g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$ et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.
2. Comme $f'' \geq 0$ sur I , la fonction f' est croissante sur I . Donc, pour $x \leq a$, $f'(x) \leq f'(a)$ et $g'(x) \leq 0$; pour $x \geq a$, $f'(x) \geq f'(a)$ et $g'(x) \geq 0$.
3. g est décroissante sur $I \cap]-\infty; a]$ puis croissante sur $I \cap [a; +\infty[$: elle admet donc un minimum en a , égal à $g(a) = 0$. Conclusion : $g(x) \geq 0$, soit $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ pour tout $x \in I$: la courbe de f est au-dessus de chacune de ses tangentes.
4. Soit $\varphi(x) = (1+x)^n$ sur $] -1; +\infty[$. Elle est deux fois dérivable, $\varphi'(x) = n(1+x)^{n-1}$ et $\varphi''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$. Comme $n \geq 2$ et $1+x > 0$, $\varphi''(x) > 0$: φ est convexe. Sa tangente en 0 a pour équation $y = \varphi(0) + \varphi'(0)x = 1 + nx$. D'après la question 3 : $(1+x)^n \geq 1 + nx$ pour tout $x > -1$ (l'égalité est triviale pour $n = 1$). Avec $x = 0,01$ et $n = 100$: $1,01^{100} \geq 1 + 100 \times 0,01 = 2$. Plus généralement $1,01^n \geq 1 + 0,01n$ pour tout entier $n \geq 1$, et $1 + 0,01n \rightarrow +\infty$. Conclusion : par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,01^n = +\infty$.

D2.

1. $\exp'(m) = \exp(m) = e^m$: la tangente en m a pour équation $y = e^m + e^m(x - m) = e^m(1 + x - m)$. L'exponentielle étant convexe sur $\mathbb{R}$ ($\exp'' = \exp > 0$), sa courbe est au-dessus de cette tangente. Conclusion : $e^x \geq e^m(1 + x - m)$ pour tout réel x .
2. En additionnant les trois inégalités obtenues pour $x = a$, $x = b$, $x = c$: $e^a + e^b + e^c \geq e^m(3 + (a + b + c) - 3m) = 3e^m$, car $a + b + c = 3m$. Conclusion : $e^m \leq \frac{e^a + e^b + e^c}{3}$.
3. $\varphi'(x) = e^x - e^m$, qui est négatif pour $x < m$ et positif pour $x > m$: φ est strictement décroissante sur $] -\infty; m]$, strictement croissante sur $[m; +\infty[$, de minimum $\varphi(m) = e^m - e^m = 0$. Donc $\varphi(x) > 0$ pour $x \neq m$. La somme de trois nombres positifs $\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) = e^a + e^b + e^c - 3e^m$ est nulle si et seulement si les trois sont nuls, c'est-à-dire si $a = b = c = m$. Conclusion : il y a égalité si et seulement si $a = b = c$.
4. Avec $a = x$, $b = y$, $c = -x - y$, on a $m = 0$ et $e^m = 1$: $e^x + e^y + e^{-x-y} \geq 3$. Égalité si et seulement si $x = y = -x - y$, ce qui avec $x = y$ donne $3x = 0$. Conclusion : l'inégalité est vraie pour tous réels x, y , avec égalité uniquement pour $x = y = 0$; le minimum de la somme est 3.

D3.

1. $\exp'(a) = e^a$: $T_a : y = e^a + e^a(x - a) = e^a(x + 1 - a)$. Pour $x = 0$: $y = (1 - a)e^a = \varphi(a)$.
2. $M(0; q) \in T_a \iff q = \varphi(a)$. Les pentes e^a sont deux à deux distinctes (l'exponentielle est strictement croissante), donc à deux valeurs distinctes de a correspondent deux tangentes distinctes. Conclusion : le nombre de tangentes passant par M est le nombre de solutions de $\varphi(a) = q$.
3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\varphi'(a) = -e^a + (1 - a)e^a = -ae^a$, du signe de $-a$. On a $\varphi(0) = 1$. En $-\infty$: $\varphi(a) = e^a - ae^a \rightarrow 0 - 0 = 0$. En $+\infty$: $1 - a \rightarrow -\infty$ et $e^a \rightarrow +\infty$, donc $\varphi(a) \rightarrow -\infty$.

a	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(a)$	+	0	-
φ	0	1	$-\infty$

4. φ est continue. Sur $] -\infty; 0]$, elle est strictement croissante et prend exactement les valeurs de $]0; 1]$. Sur $[0; +\infty[$, elle est strictement décroissante et prend exactement les valeurs de $] -\infty; 1]$. Si $q > 1$: aucune solution. Si $q = 1$: une seule, $a = 0$. Si $0 < q < 1$: une dans $] -\infty; 0]$ et une dans $[0; +\infty[$, soit deux. Si $q \leq 0$: une seule, dans $[1; +\infty[$ (pour $q \leq 0$, la valeur n'est pas prise sur

$] -\infty; 0]$). *Conclusion* : 0 tangente si $q > 1$; 1 tangente si $q = 1$ ou $q \leq 0$; 2 tangentes si $0 < q < 1$.
Interprétation : $\mathcal{C}$ est convexe, donc au-dessus de chacune de ses tangentes. Un point $M(0; q)$ avec $q > 1$ est au-dessus de $\mathcal{C}$ (qui passe par $(0; 1)$) : il ne peut appartenir à aucune tangente.

5. Pour $q = 0$: $\varphi(a) = 0 \iff a = 1$; la tangente est $T_1 : y = ex$. Pour $q = \frac{1}{2}$: $\varphi(-2) = 3e^{-2} \approx 0,41 < \frac{1}{2} < \varphi(-1) = 2e^{-1} \approx 0,74$, et φ est continue strictement croissante sur $] -\infty; 0]$: $a_1 \in] -2; -1[$. De même $\varphi(0) = 1 > \frac{1}{2} > \varphi(1) = 0$ avec φ continue strictement décroissante sur $[0; +\infty[$: $a_2 \in]0; 1[$. *Conclusion* : la seule tangente passant par O est $y = ex$; il y a deux tangentes passant par $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$, aux points d'abscisses $a_1 \in] -2; -1[$ et $a_2 \in]0; 1[$.

D4. Partie A.

1. En $+\infty$: $f(x) = e \times x e^{-x} \rightarrow e \times 0 = 0$ (croissances comparées). En $-\infty$: $x \rightarrow -\infty$ et $e^{1-x} \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. *Conclusion* : l'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit et composée) : $f'(x) = e^{1-x} - x e^{1-x} = (1-x) e^{1-x}$, du signe de $1-x$. Et $f(1) = 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	1	0

3. $f''(x) = -e^{1-x} - (1-x) e^{1-x} = (x-2) e^{1-x}$, du signe de $x-2$. On a $f(2) = \frac{2}{e}$. *Conclusion* : f est concave sur $] -\infty; 2]$, convexe sur $[2; +\infty[$; $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion $I\left(2; \frac{2}{e}\right)$.
4. $f(0) = 0$ et $f'(0) = e$: $T : y = ex$. Pour tout réel x , $f(x) - ex = x e(e^{-x} - 1)$. Si $x > 0$: $e^{-x} < 1$, donc ce nombre est négatif. Si $x < 0$: $e^{-x} > 1$ et $x < 0$, donc il est négatif aussi. Il est nul seulement en 0. *Conclusion* : $f(x) \leq ex$ pour tout réel x . On ne peut pas en conclure que f est concave sur $\mathbb{R}$: elle est convexe sur $[2; +\infty[$ (la propriété « sous une tangente donnée » ne caractérise pas la concavité, qui exige d'être sous toutes les tangentes).
5. Par le maximum : $f(x) \leq f(1) = 1$, soit $x e^{1-x} \leq 1$; en multipliant par $e^{x-1} > 0$: $x \leq e^{x-1}$. Par la convexité : $k(x) = e^{x-1}$ est deux fois dérivable avec $k''(x) = e^{x-1} > 0$: k est convexe sur $\mathbb{R}$. On a $k(1) = 1$ et $k'(1) = 1$: sa tangente en 1 est $y = 1 + (x-1) = x$. La courbe de k étant au-dessus de cette tangente, $e^{x-1} \geq x$.

Partie B.

1. Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2} \in]0; 1[$. Hérédité : si $0 < u_n < 1$, comme f est strictement croissante sur $[0; 1]$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on obtient $f(0) < f(u_n) < f(1)$, soit $0 < u_{n+1} < 1$. *Conclusion* : $0 < u_n < 1$ pour tout entier n .
2. Comme $u_n > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n e^{1-u_n}}{u_n} = e^{1-u_n}$. Or $u_n < 1$ donne $1-u_n > 0$ donc $e^{1-u_n} > 1$: $u_{n+1} > u_n$. *Conclusion* : (u_n) est strictement croissante.
3. La suite est croissante et majorée par 1 : elle converge vers un réel ℓ , avec $\frac{1}{2} = u_0 \leq \ell \leq 1$. Comme f est continue, ℓ vérifie $\ell = f(\ell) = \ell e^{1-\ell}$. Puisque $\ell > 0$, on peut diviser : $e^{1-\ell} = 1$, soit $\ell = 1$. *Conclusion* : (u_n) converge vers 1.
4. Le test est `1 - u >= eps` et la mise à jour est `u = u * exp(1 - u)`.

```
def seuil(eps):
    u = 0.5
```

```

n = 0
while 1 - u >= eps:
    u = u * exp(1 - u)
    n = n + 1
return n

```

On a $u_1 \approx 0,8244$, $u_2 \approx 0,98264$, $u_3 \approx 0,999848$ (donc $1 - u_3 \approx 1,5 \times 10^{-4} > 10^{-6}$) et $u_4 \approx 0,99999999$ ($1 - u_4 \approx 1,2 \times 10^{-8} < 10^{-6}$). *Conclusion : seuil (1e-6) renvoie 4.*

D5.

- $f'_m(x) = 4x^3 + 3mx^2 = x^2(4x + 3m)$ et $f''_m(x) = 12x^2 + 6mx = 6x(2x + m)$.
- Si $m = 0$: $f''_0(x) = 12x^2 \geq 0$ ne change jamais de signe : f_0 est convexe, pas de point d'inflexion. Si $m \neq 0$: f''_m s'annule en 0 et en $-\frac{m}{2}$ (deux valeurs distinctes), c'est un trinôme de racines simples, donc il change de signe en chacune. *Conclusion : aucun point d'inflexion si $m = 0$, exactement deux si $m \neq 0$: $I(0; 0)$ et $J\left(-\frac{m}{2}; -\frac{m^4}{16}\right)$, car $f_m\left(-\frac{m}{2}\right) = \frac{m^4}{16} - \frac{m^4}{8} = -\frac{m^4}{16}$.*
- $f'_m(0) = 0$: T_I : $y = 0$ (l'axe des abscisses). $f'_m\left(-\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4}(-2m + 3m) = \frac{m^3}{4}$: T_J : $y = -\frac{m^4}{16} + \frac{m^3}{4}\left(x + \frac{m}{2}\right)$, soit $y = \frac{m^3}{4}x + \frac{m^4}{16}$.
- On développe : $\left(x + \frac{m}{2}\right)^3\left(x - \frac{m}{2}\right) = \left(x^3 + \frac{3m}{2}x^2 + \frac{3m^2}{4}x + \frac{m^3}{8}\right)\left(x - \frac{m}{2}\right) = x^4 + mx^3 - \frac{m^3}{4}x - \frac{m^4}{16}$, ce qui est bien $f_m(x) - \frac{m^3}{4}x - \frac{m^4}{16}$. Cette différence s'annule pour $x = -\frac{m}{2}$ (point J) et pour $x = \frac{m}{2} \neq -\frac{m}{2}$: $K\left(\frac{m}{2}; \frac{3m^4}{16}\right)$, car $f_m\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^4}{16} + \frac{m^4}{8} = \frac{3m^4}{16}$. Le produit $\left(x + \frac{m}{2}\right)^3\left(x - \frac{m}{2}\right)$ change de signe en chacune de ses deux racines distinctes (de multiplicités 3 et 1, impaires) et est positif pour x grand en valeur absolue (coefficient dominant 1, degré pair) : il est positif à l'extérieur de l'intervalle d'extrémités $-\frac{m}{2}$ et $\frac{m}{2}$, négatif à l'intérieur, que m soit positif ou négatif.
Conclusion : T_J recoupe $\mathcal{C}_m$ en un unique autre point $K\left(\frac{m}{2}; \frac{3m^4}{16}\right)$; $\mathcal{C}_m$ est au-dessus de T_J en dehors de l'intervalle d'extrémités $-\frac{m}{2}$ et $\frac{m}{2}$, en dessous à l'intérieur.
- $J\left(-\frac{m}{2}; -\frac{m^4}{16}\right)$: avec $x_J = -\frac{m}{2}$, $x_J^4 = \frac{m^4}{16}$ donc $y_J = -x_J^4$. Pour K : $x_K = \frac{m}{2}$ et $y_K = \frac{3m^4}{16} = 3x_K^4$. *Conclusion : les points J sont sur la courbe d'équation $y = -x^4$ et les points K sur celle d'équation $y = 3x^4$.*

D6.

- $h' = f' e^f$ puis $h'' = f'' e^f + f' \times f' e^f = (f'' + (f')^2) e^f$. Si f est convexe, $f'' \geq 0$, et $(f')^2 \geq 0$, $e^f > 0$: $h'' \geq 0$. *Conclusion : h est convexe sur I .*
- $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (dérivée seconde $2 > 0$), donc $h(x) = e^{x^2}$ est convexe sur $\mathbb{R}$. On a $h(1) = e$, $h'(x) = 2xe^{x^2}$, $h'(1) = 2e$: la tangente en 1 est $y = e + 2e(x - 1) = e(2x - 1)$. *Conclusion : h convexe est au-dessus de cette tangente, soit $e^{x^2} \geq e(2x - 1)$ pour tout réel x .*
- Avec $f(x) = \sqrt{x}$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(f'(x))^2 = \frac{1}{4x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$. Donc $f'' + (f')^2 = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{4x\sqrt{x}}$ et $h''(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{4x\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$. Le signe de h'' est celui de $\sqrt{x} - 1$: négatif sur $]0; 1[$, positif sur $]1; +\infty[$. *Conclusion : h est concave sur $]0; 1]$, convexe sur $[1; +\infty[$ et sa courbe a un point d'inflexion d'abscisse 1. Sur $[1; +\infty[$, $h = e^f$ est convexe alors que $f = \sqrt{x}$ est concave : la réciproque de la question 1 est fausse.*
- $h(1) = e$ et $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$, donc $h'(1) = \frac{e}{2}$: T : $y = e + \frac{e}{2}(x - 1) = \frac{e}{2}(x + 1)$. Sur $]0; 1]$, h est concave : sa courbe est en dessous de T ; sur $[1; +\infty[$, h est convexe : elle est au-dessus de

T . Avec $x = 2 : e^{\sqrt{2}} \geq \frac{3e}{2}$. Avec $x = \frac{1}{4} : e^{1/2} \leq \frac{e}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{5e}{8}$. *Conclusion* : $e^{\sqrt{2}} \geq \frac{3e}{2} \approx 4,08$ et $e^{1/2} \leq \frac{5e}{8} \approx 1,70$.

D7.

1. $f'(a) = 2a$ et $f(a) = a^2 - 2 : T_a : y = a^2 - 2 + 2a(x - a)$. Elle coupe l'axe des abscisses lorsque $2a(x - a) = -(a^2 - 2)$, soit $x = a - \frac{a^2 - 2}{2a} = \frac{a^2 + 2}{2a} = g(a)$. Comme $a^2 - 2 + 2a(x - a)$ est affine de pente $2a$ et s'annule en $g(a)$, on a bien $y = 2a(x - g(a))$. *Conclusion* : $g(a) = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right)$.
2. $f''(x) = 2 > 0 : f$ est convexe. Sa courbe est au-dessus de $T_a : f(\sqrt{2}) \geq 2a(\sqrt{2} - g(a))$, soit $0 \geq 2a(\sqrt{2} - g(a))$. Comme $2a > 0 : \sqrt{2} - g(a) \leq 0$. *Conclusion* : $g(a) \geq \sqrt{2}$ pour tout $a > 0$.
3. $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$; pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = g(u_n) \geq \sqrt{2}$ d'après la question 2 (avec $u_n > 0$), donc $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n . Ensuite $u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$ car $u_n^2 \geq 2 : (u_n)$ est décroissante. Décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, elle converge vers un réel $\ell \geq \sqrt{2}$. La fonction g étant continue sur $]0; +\infty[$, $\ell = g(\ell)$, soit $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right)$, donc $\ell^2 = 2$ et $\ell = \sqrt{2}$. *Conclusion* : (u_n) est décroissante et converge vers $\sqrt{2}$.
4. $e_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} = \frac{e_n^2}{2u_n}$. Comme $u_n \geq \sqrt{2} > 1$, on a $2u_n > 2$ et $e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2}$. Avec $e_0 < 0,6 : e_1 < \frac{0,6^2}{2} = 0,18, e_2 < \frac{0,18^2}{2} < 0,02, e_3 < \frac{0,02^2}{2} = 2 \times 10^{-4}, e_4 < \frac{(2 \times 10^{-4})^2}{2} = 2 \times 10^{-8}, e_5 < \frac{(2 \times 10^{-8})^2}{2} = 2 \times 10^{-16}$. *Conclusion* : $e_5 < 2 \times 10^{-16} < 10^{-10} : u_5$ approche $\sqrt{2}$ à mieux que 10^{-10} (la précision double environ à chaque étape).
5.

```
def newton(n):
    u = 2
    for k in range(n):
        u = (u + 2/u) / 2
    return u
```

 $u_1 = \frac{1}{2}(2 + 1) = \frac{3}{2}, u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{17}{12}, u_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17} \right) = \frac{577}{408}$. *Conclusion* : $u_1 = \frac{3}{2}, u_2 = \frac{17}{12} \approx 1,41667, u_3 = \frac{577}{408} \approx 1,414216$.