

Dérivation et convexité**Fiche Bases**

Nom : _____

Date : _____

Exercice B1 : Dérivées de fonctions composéesCalculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle I indiqué.

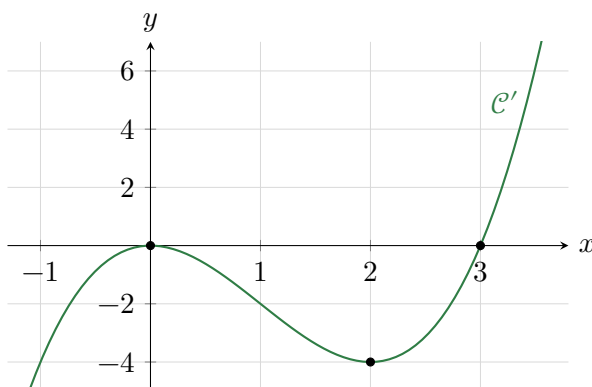
1. $f(x) = (3x - 1)^4$, $I = \mathbb{R}$;
2. $g(x) = e^{-2x+5}$, $I = \mathbb{R}$;
3. $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, $I = \mathbb{R}$;
4. $k(x) = \frac{1}{(2x + 3)^2}$, $I = \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$;
5. $l(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$, $I = \mathbb{R}$;
6. $m(x) = \sin(x^2)$, $I = \mathbb{R}$;
7. On pose $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = x^4$. Exprimer $v \circ u$ et $u \circ v$. Vérifier que $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ redonne la dérivée de la question 1.

Exercice B2 : Produits et quotients avec l'exponentiellePour chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$, calculer la dérivée et la mettre sous forme factorisée.

1. $f(x) = (2x - 1)e^x$;
2. $g(x) = xe^{-x}$;
3. $h(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$;
4. $k(x) = (x^2 + 1)e^{-2x}$.

Exercice B3 : Tangentes

1. Soit $f(x) = e^{2x-1}$ sur $\mathbb{R}$. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
2. Soit $g(x) = \sqrt{2x + 1}$ sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 4.
3. Soit $h(x) = x^3 - 3x$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer les points de la courbe de h où la tangente est horizontale, puis les abscisses des points où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 9x$.

Exercice B4 : Lecture graphique sur la courbe de f' Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}'$ de sa fonction dérivée f' . On admet que f' est croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[2; +\infty[$, et décroissante sur $[0; 2]$.

1. Lire $f'(2)$. En déduire le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.
2. Donner le signe de f' , puis les variations de f .

- On a $f'(0) = 0$. La fonction f admet-elle un extremum local en 0 ? Justifier.
- En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe, ceux sur lesquels elle est concave, et les abscisses des points d'inflexion de sa courbe.

Exercice B5 : Dérivée seconde et convexité

Pour chaque fonction, calculer f' et f'' , étudier la convexité sur $\mathbb{R}$ et donner les coordonnées du point d'inflexion.

- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$;
- $g(x) = x e^x$.

Exercice B6 : Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier (contre-exemple si elle est fausse).

- Si f est croissante sur un intervalle I , alors f est convexe sur I .
- Si $f''(a) = 0$, alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse a .
- La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- Si f est dérivable et convexe sur I et si $f'(a) = 0$ avec $a \in I$, alors f admet un minimum sur I atteint en a .
- La fonction cube est concave sur $] -\infty ; 0]$.

Exercice B7 : Convexité et inégalités

- Justifier que l'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ et donner l'équation de sa tangente en 0. En déduire que $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x , puis que $e^{-0,2} \geq 0,8$.
- Justifier que la fonction racine carrée est concave sur $]0 ; +\infty[$ et donner l'équation de sa tangente au point d'abscisse 4. En déduire que $\sqrt{x} \leq \frac{x}{4} + 1$ pour tout $x > 0$, puis que $\sqrt{5} \leq 2,25$.

Exercice B8 : Python : taux d'accroissement et tangente

On considère le programme suivant, où $f(x) = (2x - 1)e^x$.

```
from math import exp
```

```
def f(x):
    return (2*x - 1) * exp(x)
```

```
def taux(a, h):
    return (f(a + h) - f(a)) / h
```

```
def tangente(a):
    m = ...      # à compléter : coefficient directeur
    p = ...      # à compléter : ordonnée à l'origine
    return m, p
```

- Calculer $f'(x)$ puis $f'(0)$.
- Que représente la valeur renvoyée par `taux(0, 0.001)` ? Sans calculatrice, de quel nombre cette valeur est-elle proche ? Justifier.
- Compléter les lignes `m = ...` et `p = ...` pour que `tangente(a)` renvoie le couple $(m; p)$ tel que la tangente en a ait pour équation $y = mx + p$.
- Que renvoie `tangente(0)` ? Donner l'équation correspondante.

Exercice B9 : QCM

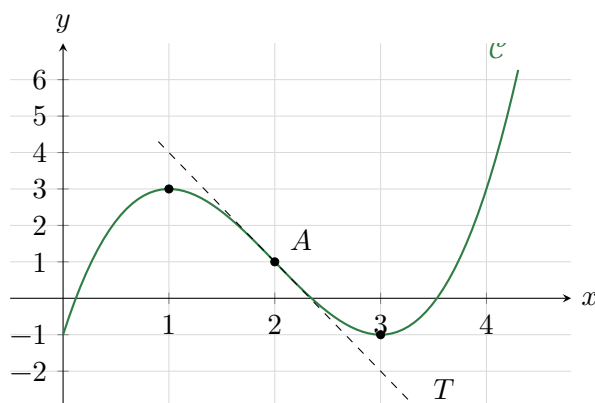
Une seule réponse est exacte. Choisir et justifier.

- La dérivée de $f(x) = e^{x^2+1}$ est : **A.** e^{x^2+1} **B.** $2x e^{x^2+1}$ **C.** $(x^2 + 1) e^{x^2}$.

2. La dérivée de $f(x) = \sqrt{3x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ est : **A.** $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ **B.** $\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}$ **C.** $\frac{3}{\sqrt{3x+1}}$.
3. Pour $f(x) = \cos(2x)$, on a $f''(x) =$ **A.** $-2\cos(2x)$ **B.** $4\cos(2x)$ **C.** $-4\cos(2x)$.
4. Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f''(x) = (x-1)^2(x+2)$. La courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse : **A.** 1 seulement **B.** -2 et 1 **C.** -2 seulement.

Exercice B10 : Lecture graphique sur la courbe de f

On donne ci-dessous, pour $x \in [0; 4,3]$, la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa tangente T au point $A(2; 1)$ de $\mathcal{C}$ (la droite T passe par les points de coordonnées $(1; 4)$ et $(3; -2)$).



1. Lire $f(2)$, puis le coefficient directeur de T . En déduire $f'(2)$.
2. Lire les abscisses des points de $\mathcal{C}$ où la tangente est horizontale. En déduire le signe de f' sur $[0; 4,3]$ et les variations de f .
3. Sur quels intervalles la fonction f semble-t-elle convexe? concave? Que peut-on en déduire pour le signe de f'' ?
4. Comment la courbe se situe-t-elle par rapport à T de part et d'autre de A ? Que peut-on en conclure pour A ?
5. On admet que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et confirmer par le calcul les réponses aux questions 2 et 3.
6. Vérifier que les points $M(0; -1)$, $N(2; 1)$, $P(3; -1)$, $Q(4; 3)$ appartiennent à $\mathcal{C}$. Comparer l'ordonnée du point d'abscisse 1 de la corde $[MN]$ avec $f(1)$, puis celle du point d'abscisse 3,5 de la corde $[PQ]$ avec $f(3,5)$. Que traduit la position de la courbe par rapport à ces cordes?