

Corrigé : Dérivation et convexité**Fiche Bases**

B1. Chaque fonction est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables; pour h et k , l'expression sous la racine ou au dénominateur est strictement positive sur I .

1. Avec $u(x) = 3x - 1$, $u'(x) = 3$ et $(u^n)' = n u' u^{n-1}$: $f'(x) = 4 \times 3 \times (3x - 1)^3 = 12(3x - 1)^3$.
2. Avec $u(x) = -2x + 5$, $u'(x) = -2$ et $(e^u)' = u' e^u$: $g'(x) = -2 e^{-2x+5}$.
3. Avec $u(x) = x^2 + 4 > 0$, $u'(x) = 2x$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$: $h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.
4. On écrit $k(x) = (2x + 3)^{-2}$ avec $u(x) = 2x + 3 > 0$ sur I , $u'(x) = 2$ et $n = -2$: $k'(x) = -2 \times 2 \times (2x + 3)^{-3} = -\frac{4}{(2x + 3)^3}$.
5. Avec $u(x) = 3x + \frac{\pi}{4}$, $u'(x) = 3$ et $(\cos u)' = -u' \sin u$: $l'(x) = -3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.
6. Avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$ et $(\sin u)' = u' \cos u$: $m'(x) = 2x \cos(x^2)$.
7. $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = (3x - 1)^4 = f(x)$ et $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = 3x^4 - 1$. Ces deux fonctions sont différentes (en $x = 1$: 16 et 2). Avec $v'(x) = 4x^3$ et $u'(x) = 3$: $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) = 4(3x - 1)^3 \times 3 = 12(3x - 1)^3$, ce qui est bien $f'(x)$.

B2. Les fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme produits, quotients (dénominateur $x^2 + 1 > 0$) ou composées de fonctions dérivables.

1. Produit uv avec $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = e^x = v'(x)$: $f'(x) = 2e^x + (2x - 1)e^x = (2x + 1)e^x$.
2. $u(x) = x$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$: $g'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1 - x)e^{-x}$.
3. Quotient $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2 + 1$, $v'(x) = 2x$: $h'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$.
4. $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = e^{-2x}$, $v'(x) = -2e^{-2x}$: $k'(x) = 2x e^{-2x} - 2(x^2 + 1)e^{-2x} = -2(x^2 - x + 1)e^{-2x}$.

B3.

1. $a = \frac{1}{2}$: $f(a) = e^0 = 1$; $f'(x) = 2e^{2x-1}$ donc $f'(a) = 2$. La tangente a pour équation $y = 1 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$. *Conclusion* : $y = 2x$.
2. $a = 4$: $g(4) = \sqrt{9} = 3$; $g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ donc $g'(4) = \frac{1}{3}$. Équation : $y = 3 + \frac{1}{3}(x - 4)$.
Conclusion : $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.
3. $h'(x) = 3x^2 - 3$. Tangente horizontale : $h'(x) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$, avec $h(1) = -2$ et $h(-1) = 2$. Points $(1; -2)$ et $(-1; 2)$. Tangente parallèle à $y = 9x$: $h'(x) = 9 \iff 3x^2 = 12 \iff x = \pm 2$. *Conclusion* : tangente horizontale en $(1; -2)$ et $(-1; 2)$; tangente de pente 9 aux points d'abscisses -2 et 2 .

B4.

1. La courbe $\mathcal{C}'$ passe par $(2; -4)$: $f'(2) = -4$. Le coefficient directeur de la tangente en 2 est $f'(2)$.
Conclusion : il vaut -4 .
2. La courbe $\mathcal{C}'$ est sous l'axe des abscisses sur $] -\infty; 3[$ (elle touche l'axe en 0 sans le traverser) et au-dessus sur $]3; +\infty[$: $f' \leq 0$ sur $] -\infty; 3[$ et $f' > 0$ sur $]3; +\infty[$. *Conclusion* : f est décroissante sur $] -\infty; 3[$ et croissante sur $]3; +\infty[$; elle admet un minimum en 3.
3. f' s'annule en 0 mais reste négative de part et d'autre : elle ne change pas de signe. *Conclusion* : pas d'extremum local en 0 (f est décroissante au voisinage de 0).
4. f est convexe lorsque f' est croissante, concave lorsque f' est décroissante. *Conclusion* : f est convexe sur $] -\infty; 0]$ et sur $[2; +\infty[$, concave sur $[0; 2]$. Comme f' change de variation en 0 et en 2 (c'est-à-dire f'' change de signe), les points d'abscisses 0 et 2 sont des points d'inflexion.

B5.

1. Polynôme, donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 - 12x$ et $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$. $f'' \leq 0$ sur $] -\infty; 2]$ et $f'' \geq 0$ sur $[2; +\infty[$. De plus $f(2) = 8 - 24 + 5 = -11$. *Conclusion : f est concave sur $] -\infty; 2]$, convexe sur $[2; +\infty[$; f'' s'annule en changeant de signe en 2 : point d'inflexion $A(2; -11)$.*
2. g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$: $g'(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$, puis $g''(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$. Comme $e^x > 0$, $g''(x)$ est du signe de $x + 2$. De plus $g(-2) = -2e^{-2}$. *Conclusion : g est concave sur $] -\infty; -2]$, convexe sur $[-2; +\infty[$; point d'inflexion $B(-2; -2e^{-2})$.*

B6.

- a) **Faux.** Contre-exemple : $f(x) = \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$. On a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$, donc f est croissante, mais $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$: f est concave.
- b) **Faux.** Contre-exemple : $f(x) = x^4$. On a $f''(x) = 12x^2$, qui s'annule en 0 sans changer de signe (elle est positive de part et d'autre) : pas de point d'inflexion en 0.
- c) **Vrai.** $(e^{-x})'' = e^{-x} > 0$ pour tout réel x , donc la fonction est convexe sur $\mathbb{R}$.
- d) **Vrai.** La courbe de f est au-dessus de sa tangente en a , d'équation $y = f(a)$ puisque $f'(a) = 0$. Donc $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in I$.
- e) **Vrai.** Pour $f(x) = x^3$, $f''(x) = 6x \leq 0$ sur $] -\infty; 0]$.

B7.

1. $\exp'' = \exp > 0$ sur $\mathbb{R}$: l'exponentielle est convexe. Sa tangente en 0 a pour équation $y = e^0 + e^0(x - 0) = 1 + x$. La courbe étant au-dessus de ses tangentes : $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x . Avec $x = -0,2$: $e^{-0,2} \geq 1 - 0,2 = 0,8$.
2. Pour $g(x) = \sqrt{x}$: $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$ sur $]0; +\infty[$: g est concave. On a $g(4) = 2$ et $g'(4) = \frac{1}{4}$; la tangente a pour équation $y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) = \frac{x}{4} + 1$. La courbe étant en dessous de ses tangentes : $\sqrt{x} \leq \frac{x}{4} + 1$ pour tout $x > 0$. Avec $x = 5$: $\sqrt{5} \leq \frac{5}{4} + 1 = 2,25$.

B8.

1. f est un produit : $f'(x) = 2e^x + (2x - 1)e^x = (2x + 1)e^x$, donc $f'(0) = 1$.
2. $\text{taux}(0, 0.001)$ est le taux d'accroissement $\frac{f(0,001) - f(0)}{0,001}$ de f entre 0 et 0,001. Pour h proche de 0, il est proche du nombre dérivé. *Conclusion : la valeur renvoyée est proche de $f'(0) = 1$ (l'exécution donne environ 1,0015).*
3. $m = (2 \cdot a + 1) \cdot \exp(a)$ et $p = f(a) - m \cdot a$. En effet, la tangente $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ s'écrit $y = mx + p$ avec $m = f'(a)$ et $p = f(a) - f'(a)a$.
4. Pour $a = 0$: $m = 1$ et $p = f(0) - 0 = -1$. *Conclusion : tangente(0) renvoie (1.0, -1.0), soit la tangente d'équation $y = x - 1$.*

B9.

1. **B.** Avec $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$ et $(e^u)' = u'e^u$: $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$.
2. **A.** Avec $u(x) = 3x + 1 > 0$, $u'(x) = 3$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$: $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.
3. **C.** $f'(x) = -2\sin(2x)$ puis $f''(x) = -2 \times 2 \cos(2x) = -4\cos(2x)$.
4. **C.** On a $(x - 1)^2 \geq 0$: ce facteur ne change pas de signe en 1, donc le signe de f'' est celui de $x + 2$ (sauf en 1 où f'' s'annule). f'' change de signe uniquement en -2 .

B10.

1. Le point $A(2; 1)$ est sur $\mathcal{C}$: $f(2) = 1$. La droite T passe par $(1; 4)$ et $(3; -2)$: son coefficient directeur est $\frac{-2-4}{3-1} = -3$. C'est le nombre dérivé en 2. *Conclusion : $f(2) = 1$ et $f'(2) = -3$.*

2. Les tangentes sont horizontales aux points $(1; 3)$ et $(3; -1)$: $f'(1) = f'(3) = 0$. La courbe monte jusqu'au point d'abscisse 1, descend entre 1 et 3, puis remonte. *Conclusion* : $f' \geq 0$ sur $[0; 1]$, $f' \leq 0$ sur $[1; 3]$, $f' \geq 0$ sur $[3; 4,3]$; f est croissante sur $[0; 1]$, décroissante sur $[1; 3]$, croissante sur $[3; 4,3]$, avec un maximum local 3 en 1 et un minimum local -1 en 3.
3. La courbe « se courbe vers le bas » (elle est au-dessous de ses tangentes) pour $x \leq 2$ et « vers le haut » (au-dessus de ses tangentes) pour $x \geq 2$. *Conclusion* : f semble concave sur $[0; 2]$ et convexe sur $[2; 4,3]$, donc $f'' \leq 0$ sur $[0; 2]$ et $f'' \geq 0$ sur $[2; 4,3]$.
4. Avant A la courbe est en dessous de T , après A elle est au-dessus : elle traverse sa tangente en A . *Conclusion* : $A(2; 1)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ (la convexité change de sens en A).
5. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ et $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$. f' est un trinôme de coefficient dominant positif : $f' \geq 0$ à l'extérieur des racines 1 et 3 et $f' \leq 0$ entre elles. Et $f'' \leq 0$ sur $]-\infty; 2]$, $f'' \geq 0$ sur $[2; +\infty[$. On a aussi $f(2) = 8 - 24 + 18 - 1 = 1$ et $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$. *Conclusion* : les calculs confirment la lecture graphique; f'' s'annule en changeant de signe en 2, donc $A(2; 1)$ est bien un point d'inflexion.
6. $f(0) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 27 - 54 + 27 - 1 = -1$ et $f(4) = 64 - 96 + 36 - 1 = 3$: les quatre points sont sur $\mathcal{C}$.
 La corde $[MN]$ passe par $(1; 0)$ (milieu de M et N) et $f(1) = 3 > 0$: la courbe est *au-dessus* de la corde.
 La corde $[PQ]$ passe par $(3,5; 1)$ (milieu de P et Q) et $f(3,5) = 42,875 - 73,5 + 31,5 - 1 = -0,125 < 1$: la courbe est *au-dessous* de la corde.
Conclusion : une courbe au-dessus de ses cordes correspond à une fonction concave (ici sur $[0; 2]$), une courbe au-dessous de ses cordes à une fonction convexe (ici sur $[3; 4]$), ce qui est cohérent avec la question 3.