

Fiche 4 : inégalités, convexité et suites

Huit exercices sur les inégalités classiques du bac, démontrées par une étude de fonction auxiliaire ou par la convexité, et sur leurs applications : limites, suites, moyennes.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : fonction auxiliaire définie, dérivée factorisée, signe justifié, minimum ou maximum invoqué, conclusion.

Les deux méthodes pour une inégalité $f(x) \geq g(x)$

1. **La fonction auxiliaire.** On pose $h = f - g$, on étudie les variations de h , et on montre que son minimum est ≥ 0 (souvent égal à 0).
2. **La convexité.** Si f est convexe, sa courbe est au-dessus de ses tangentes. Si f est concave, elle est en dessous.

Ces inégalités servent ensuite pour des **limites** (comparaison, gendarmes), des **suites** (monotonie) et des **estimations**.

Les pièges classiques

- Oublier de préciser l'**intervalle** sur lequel l'inégalité est démontrée.
- Étudier le signe de h' mais oublier la **valeur du minimum** ($h(0) = 0$ par exemple).
- Se tromper de sens dans une inégalité en la retournant sans raison.
- Multiplier ou diviser par une quantité **sans connaître son signe**.

L'inégalité $e^x \geq 1 + x$ est la plus rentable du programme : elle sert à tout, comme le couteau suisse des exercices du bac.

Exercice 1 (★★) : l'inégalité $e^x \geq 1 + x$

1. Démontrer par l'étude d'une fonction que, pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

Correction de l'exercice 1

Question 1

Soit $g(x) = e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$.

Comme l'exponentielle est strictement croissante et $e^0 = 1$: $g'(x) < 0$ si $x < 0$, $g'(0) = 0$ et $g'(x) > 0$ si $x > 0$.

Donc g est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Elle admet un minimum en 0, égal à $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.

Ainsi $g(x) \geq 0$ pour tout x .

$$e^x \geq 1 + x$$

Question 2

Soit $n \geq 1$. En appliquant l'inégalité de la question 1 avec $x = \frac{1}{n}$: $1 + \frac{1}{n} \leq e^{1/n}$.

Ces deux nombres sont positifs, donc, en élevant à la puissance n (la fonction $t \mapsto t^n$ est croissante sur $[0; +\infty[$) :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(e^{1/n}\right)^n = e$$

Donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

Exercice 2 (★★) : un encadrement plus fin et une limite

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$.

Correction de l'exercice 2

Question 1

Soit $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ sur $[0; +\infty[$. La fonction g est dérivable et $g'(x) = e^x - 1 - x$.

D'après l'exercice 1, $e^x \geq 1 + x$, donc $g'(x) \geq 0$ pour tout x . g est croissante sur $[0; +\infty[$.

Comme $g(0) = 1 - 1 = 0$, on a $g(x) \geq g(0) = 0$ pour $x \geq 0$.

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \text{ pour tout } x \geq 0$$

Question 2

Pour $x > 0$, en divisant par $x > 0$:

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2}\right) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

On a redémontré ainsi une croissance comparée.

Exercice 3 (★★) : une racine et sa tangente

Montrer que, pour tout $x > -1$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$, en étudiant une fonction auxiliaire.

Correction de l'exercice 3

La fonction auxiliaire. Soit $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}$ sur $] -1; +\infty[$. La fonction g est dérivable sur cet intervalle et :

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{2\sqrt{1+x}}$$

Le signe. Le dénominateur est strictement positif. Le signe de $g'(x)$ est celui de $\sqrt{1+x} - 1$.
 $\sqrt{1+x} < 1 \iff 1+x < 1 \iff x < 0$.

Donc $g' < 0$ sur $] -1; 0[$, $g'(0) = 0$ et $g' > 0$ sur $]0; +\infty[$. La fonction g admet un minimum en 0, égal à $g(0) = 1 - 1 = 0$.

Conclusion. Donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x > -1$.

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

Exercice 4 (★★) : une inégalité par convexité

Montrer que, pour tout $x > -1$, $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x$, en utilisant la convexité.

Correction de l'exercice 4

La convexité. Soit $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $] -1; +\infty[$. La fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle ($1+x \neq 0$).

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Pour $x > -1$, $1+x > 0$, donc $f''(x) > 0$.

f est convexe sur $] -1; +\infty[$, et sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes.

La tangente. La tangente en 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)x = 1 - x$.

Donc, pour tout $x > -1$, $\frac{1}{1+x} \geq 1-x$.

Exercice 5 (★★★) : l'inégalité de Bernoulli par la dérivation

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que, pour tout $x > -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Correction de l'exercice 5

La fonction auxiliaire. Soit $g(x) = (1+x)^n - 1 - nx$ sur $] -1; +\infty[$. La fonction g est dérivable et :

$$g'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n[(1+x)^{n-1} - 1]$$

Le signe.

- Si $x > 0$: $1+x > 1$ et $n-1 \geq 1$, donc $(1+x)^{n-1} > 1$ et $g'(x) > 0$.
- Si $-1 < x < 0$: $0 < 1+x < 1$ et $n-1 \geq 1$, donc $0 < (1+x)^{n-1} < 1$ et $g'(x) < 0$.

Donc g est strictement décroissante sur $] -1; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet un minimum en 0, égal à $g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$.

Conclusion. Ainsi $g(x) \geq 0$ pour tout $x > -1$.

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Exercice 6 (★★★) : une suite et l'inégalité $e^x \geq 1+x$

On définit $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$. Soit $f(x) = 1 - e^{-x}$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

Correction de l'exercice 6

Question 1

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^{-x} > 0$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - e^{-1} \leq 1$.

Soit $P(n) : \ll 0 \leq u_n \leq 1 \gg$.

Initialisation. $u_0 = 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $0 \leq u_k \leq 1$. Comme f est croissante, $f(0) \leq f(u_k) \leq f(1)$.
Soit $0 \leq u_{k+1} \leq 1 - e^{-1} \leq 1 : P(k+1)$ est vraie.

Conclusion.

$0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 2

D'après l'exercice 1, pour tout réel y , $e^y \geq 1 + y$. Avec $y = -u_n : e^{-u_n} \geq 1 - u_n$, donc $1 - e^{-u_n} \leq u_n$. Soit $u_{n+1} \leq u_n$.

La suite (u_n) est décroissante.

Question 3

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone :

elle converge vers un réel $\ell \in [0; 1]$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n) : \ell = 1 - e^{-\ell}$, soit $e^{-\ell} = 1 - \ell$.

Soit $h(x) = e^{-x} - 1 + x$ sur $[0; +\infty[$. $h'(x) = 1 - e^{-x} > 0$ pour $x > 0$. h est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, avec $h(0) = 0$. Donc $h(x) > 0$ pour $x > 0$.

L'équation $h(\ell) = 0$ avec $\ell \geq 0$ impose donc $\ell = 0$.

Donc $\lim u_n = 0$.

Exercice 7 (★★★) : l'inégalité entre moyennes et l'exponentielle

Montrer que, pour tous réels a et b , $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.

Correction de l'exercice 7

Première méthode (convexité). La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ ($\exp'' = \exp > 0$) : sa courbe est en dessous de ses cordes.

Le point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ est le milieu du segment $[a; b]$.

Donc l'image du milieu est inférieure à la moyenne des images :

$$e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$$

Deuxième méthode (calcul). Soient $p = e^a > 0$ et $q = e^b > 0$. On a $(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 \geq 0$, donc $p + q \geq 2\sqrt{pq}$, soit $\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}$. Or $\sqrt{pq} = \sqrt{e^a e^b} = \sqrt{e^{a+b}} = e^{\frac{a+b}{2}}$.

Donc $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.

Exercice 8 (★★★) : encadrer e^x et retrouver une limite

1. Montrer que, pour tout $x < 1$, $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x}$.

Correction de l'exercice 8

Question 1

D'après l'exercice 1, $e^x \geq 1 + x$ pour tout x . Avec $-x$ à la place de x : $e^{-x} \geq 1 - x$. En multipliant par $e^x > 0$: $1 \geq (1 - x)e^x$. Pour $x < 1$, $1 - x > 0$, donc en divisant : $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

Donc $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$ pour tout $x < 1$.

Question 2

Pour $0 < x < 1$, en retranchant 1 :

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

En divisant par $x > 0$:

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{1-x} \rightarrow 1$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

C'est le nombre dérivé de l'exponentielle en 0.

Ce qui peut tomber au bac

- L'inégalité $e^x \geq 1 + x$ et ses applications (exercices 1, 2, 8).
- Une inégalité par **fonction auxiliaire** (exercices 2, 3, 5) ou par **convexité** (exercices 4, 7).
- Une **suite** dont la monotonie utilise une de ces inégalités (exercice 6).
- Une **limite** déduite d'un encadrement (exercices 2 et 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Une courbe convexe est située :

- A. toujours sur l'axe des abscisses
- B. de part et d'autre de ses tangentes
- C. au-dessous de ses tangentes
- D. **au-dessus de ses tangentes (bonne réponse)**

Justification : C'est la caractérisation géométrique de la convexité.

2. L'inégalité $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x s'obtient grâce à :

- A. **la convexité de l'exponentielle et sa tangente en 0 (bonne réponse)**
- B. le théorème des valeurs intermédiaires
- C. le théorème des gendarmes
- D. la limite de e^x en $+\infty$

Justification : La tangente en 0 à la courbe de **exp** est $y = x + 1$, et la courbe convexe est au-dessus.

3. En un point d'inflexion, la courbe :

- A. **traverse sa tangente (bonne réponse)**
- B. reste au-dessus de sa tangente
- C. reste au-dessous de sa tangente
- D. n'a pas de tangente

Justification : La convexité change de sens en ce point : la courbe passe d'un côté à l'autre de sa tangente.

4. Pour $f(x) = x^4$, on a $f''(0) = 0$. Le point d'abscisse 0 est-il un point d'inflexion ?

- A. **Non, car f'' ne change pas de signe (bonne réponse)**
- B. Oui, car $f''(0) = 0$
- C. Oui, car $f'(0) = 0$
- D. Non, car f n'est pas dérivable

Justification : $f''(x) = 12x^2 \geq 0$: la fonction reste convexe, il n'y a pas de changement de convexité.

5. Si $f'' > 0$ sur un intervalle I , alors f' est sur I :

- A. toujours positive
- B. **strictement croissante (bonne réponse)**
- C. constante
- D. strictement décroissante

Justification : Le signe de la dérivée de f' donne les variations de f' .

6. Dans l'exercice 1, quelle inégalité prouve-t-on par l'étude d'une fonction, valable pour tout réel x ?

- A. $e^x \geq 1 + x$ **(bonne réponse)**
- B. $e^x = 1 + x$
- C. $e^x \geq x$
- D. $e^x \leq 1 + x$

Justification : On étudie $g(x) = e^x - 1 - x$, dont le minimum est $g(0) = 0$: donc $g(x) \geq 0$ pour tout x .

7. Dans l'exercice 4, quelle méthode permet de prouver $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x$ pour $x > -1$?

- A. Le théorème des gendarmes
- B. Une récurrence
- C. **La convexité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$: la courbe est au-dessus de sa tangente en 0 (bonne réponse)**
- D. Le théorème des valeurs intermédiaires

Justification : La fonction est convexe sur $] -1 ; +\infty[$: sa courbe reste au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier celle en 0.

8. Dans l'exercice 6, avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$, quelle est la limite de (u_n) ?

- A. e
- B. $+\infty$
- C. **0 (bonne réponse)**
- D. 1

Justification : (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers ℓ tel que $\ell = 1 - e^{-\ell}$, dont la seule solution est $\ell = 0$.

9. Dans l'exercice 7, quelle inégalité relie $e^{\frac{a+b}{2}}$ à $\frac{e^a + e^b}{2}$?

- A. $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$ **(bonne réponse)**
- B. Aucune comparaison n'est possible en général
- C. $e^{\frac{a+b}{2}} = \frac{e^a + e^b}{2}$
- D. $e^{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{e^a + e^b}{2}$

Justification : C'est une conséquence de la convexité de l'exponentielle : la valeur au milieu est inférieure à la moyenne des valeurs.

10. Dans l'exercice 8, que déduit-on de l'encadrement $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$ pour $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x}$?

- A. Cette limite vaut $+\infty$
- B. Cette limite n'existe pas
- C. Cette limite vaut 0
- D. Cette limite vaut 1 (bonne réponse)

Justification : En divisant l'encadrement par $x > 0$ puis en passant à la limite (gendarmes), on retrouve le nombre dérivé de **exp** en 0, qui vaut 1.