

Fiche 3 : études de fonctions et optimisation

Huit exercices pour traiter les études de fonctions complètes du bac : polynôme, exponentielle, quotient, détermination de paramètres, lecture des variations sur la courbe de f' , problèmes d'optimisation (volume maximal, coût moyen minimal).

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : domaine, limites justifiées, dérivée factorisée, signe justifié, tableau complet, conclusion en contexte pour les problèmes.

Le plan d'une étude de fonction

1. Domaine de définition.
2. Limites aux bornes et asymptotes.
3. Dérivabilité, calcul et factorisation de f' .
4. Signe de f' , tableau de variations avec limites et valeurs.
5. Convexité et points d'inflexion si demandé.
6. Tangentes, équations, courbe.

Optimisation : variable et domaine, expression de la grandeur, variations, conclusion en contexte avec l'unité.

Les pièges classiques

- Oublier les **limites** dans le tableau de variations.
- Ne pas vérifier que l'extremum trouvé est **dans le domaine**.
- Oublier l'**unité** ou la conclusion en contexte dans un problème.
- Conclure à un extremum quand f' s'annule **sans changer de signe**.

Un tableau de variations sans limites, c'est un plat sans sel : tout y est, mais il manque ce qui fait le goût.

Exercice 1 (★★) : une étude complète d'un polynôme

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau.
3. Étudier la convexité et donner le point d'inflexion, puis la tangente en ce point.
4. Vérifier que $f(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$, puis résoudre $f(x) = 0$.

Correction de l'exercice 1

Question 1

Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right)$. Comme $\frac{3}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{2}{x^3} \rightarrow 0$, le facteur tend vers 1.

Comme $x^3 \rightarrow -\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

Question 2

f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Le signe de f' est celui d'un trinôme de racines 0 et 2 : $f' > 0$ sur $] -\infty ; 0[$, $f' < 0$ sur $]0 ; 2[$, $f' > 0$ sur $]2 ; +\infty[$.

Tableau de variations. f est strictement croissante sur $] -\infty ; 0]$ (de $-\infty$ à $f(0) = 2$). f est strictement décroissante sur $[0 ; 2]$ (de 2 à $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$). f est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$ (de -2 à $+\infty$).

Maximum local 2 en 0, minimum local -2 en 2.

Question 3

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1). \quad f'' < 0 \text{ sur }] -\infty ; 1[\text{ et } f'' > 0 \text{ sur }]1 ; +\infty[.$$

f est concave sur $] -\infty ; 1]$ et convexe sur $[1 ; +\infty[$.

Le point d'inflexion est $(1 ; f(1)) = (1 ; 0)$.

Comme $f'(1) = 3 - 6 = -3$, la tangente a pour équation $y = 0 - 3(x - 1)$.

$$y = -3x + 3$$

Question 4

$$(x - 1)(x^2 - 2x - 2) = x^3 - 2x^2 - 2x - x^2 + 2x + 2 = x^3 - 3x^2 + 2 = f(x)$$

Donc $f(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x^2 - 2x - 2 = 0$. Le discriminant de $x^2 - 2x - 2$ vaut 12, donc $x = 1 - \sqrt{3}$ ou $x = 1 + \sqrt{3}$.

Les solutions sont $1 - \sqrt{3}$, 1 et $1 + \sqrt{3}$.

Cela confirme qu'il y a trois solutions, comme le prévoit le tableau (une par intervalle de stricte monotonie).

Exercice 2 (★★) : une exponentielle avec asymptote

Soit $f(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Étudier f complètement : limites, asymptote, variations, convexité, point d'inflexion.

Correction de l'exercice 2**Limites**

En $-\infty$: $x \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$

En $+\infty$: par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

Variations

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit. $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$.

$$f'(x) = (1 - x)e^{-x}$$

Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$.

f est strictement croissante sur $] -\infty ; 1]$ (de $-\infty$ à $f(1) = \frac{1}{e}$) et strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$ (de $\frac{1}{e}$ à 0).

Maximum : $f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Convexité

$$f''(x) = -e^{-x} - (1 - x)e^{-x}.$$

$$f''(x) = (x - 2)e^{-x}, \text{ du signe de } x - 2.$$

f est concave sur $] -\infty ; 2]$ et convexe sur $[2 ; +\infty[$.

Le point d'inflexion est $(2; 2e^{-2})$.

Exercice 3 (★★★) : un quotient avec exponentielle et une inégalité

Soit $f(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau.
3. En déduire que, pour tout $x > 0$, $e^x \geq ex$.
4. Discuter, selon le réel m , le nombre de solutions de $f(x) = m$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

En 0^+ : $e^x \rightarrow 1$ et $x \rightarrow 0^+$, donc, par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty \text{ (asymptote verticale } x = 0 \text{)}$$

En $+\infty$: par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Question 2

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. $f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Comme $e^x > 0$ et $x^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

f est strictement décroissante sur $]0; 1]$ (de $+\infty$ à $f(1) = e$) et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ (de e à $+\infty$).

Son minimum est e , atteint en 1.

Question 3

Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq f(1) = e$, soit $\frac{e^x}{x} \geq e$. En multipliant par $x > 0$:

$$e^x \geq ex$$

Question 4

D'après le tableau :

- Si $m < e$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution ($f \geq e$).
- Si $m = e$, elle admet une unique solution $x = 1$.
- Si $m > e$, m est strictement compris entre e et $+\infty$.

Sur $]0; 1]$ (f continue strictement décroissante de $+\infty$ à e) et sur $[1; +\infty[$ (f continue strictement croissante de e à $+\infty$), le corollaire du TVI donne une unique solution sur chaque intervalle.

Donc deux solutions si $m > e$.

Exercice 4 (★★★) : un minimum classique

Soit $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Étudier les variations de f . En déduire que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pour tout $x > 0$, puis que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ pour tous réels $a, b > 0$.

Correction de l'exercice 4

Variations. f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

Pour $x > 0$, $x+1 > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$.

f est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$: elle admet un minimum en 1, égal à $f(1) = 2$.

L'inégalité. Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 2$.

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Application. Pour $a, b > 0$, on pose $x = \frac{a}{b} > 0$. Alors $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x + \frac{1}{x} \geq 2$.

$$\text{Donc } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Exercice 5 (★★★) : paramètres, puis étude

Soit $f(x) = (ax + b)e^x$, où a et b sont deux réels. La courbe de f passe par $A(0; -1)$ et admet en A une tangente horizontale.

1. Déterminer a et b .
2. Pour la suite, $f(x) = (x-1)e^x$. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Étudier les variations de f , sa convexité, et donner son point d'inflexion.

Correction de l'exercice 5

Question 1

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit : $f'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$.

La courbe passe par $A(0; -1)$: $f(0) = b = -1$. La tangente en A est horizontale : $f'(0) = a + b = 0$, donc $a = 1$.

Donc $a = 1$ et $b = -1$.

Question 2

Pour tout x , $f(x) = xe^x - e^x$.

En $-\infty$: par croissances comparées, $xe^x \rightarrow 0$, et $e^x \rightarrow 0$, donc, par somme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0 \text{ (asymptote } y = 0 \text{ en } -\infty)$$

En $+\infty$: $x - 1 \rightarrow +\infty$ et $e^x \rightarrow +\infty$, donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

Question 3

$$f'(x) = (x - 1 + 1)e^x.$$

$$f'(x) = xe^x, \text{ du signe de } x.$$

f est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$ (de 0 à $f(0) = -1$) et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ (de -1 à $+\infty$).

Minimum : -1 en 0 .

$$f''(x) = e^x + xe^x.$$

$$f''(x) = (x + 1)e^x, \text{ du signe de } x + 1.$$

f est concave sur $] -\infty; -1]$ et convexe sur $[-1; +\infty[$.

Point d'inflexion : $(-1; -2e^{-1})$

Exercice 6 (★★★) : optimisation, la boîte de volume maximal

Dans une feuille de carton carrée de **30** cm de côté, on découpe dans chaque coin un carré de côté x cm ($0 < x < 15$).

On replie ensuite les côtés pour former une boîte sans couvercle.

Pour quelle valeur de x le volume de la boîte est-il maximal ?

Quel est ce volume ?

Correction de l'exercice 6

Modélisation. La base de la boîte est un carré de côté $30 - 2x$, et sa hauteur est x . Le volume, en cm^3 , est :

$$V(x) = x(30 - 2x)^2 \quad \text{pour } x \in]0; 15[$$

Variations. V est dérivable comme polynôme.

$$V'(x) = (30 - 2x)^2 + x \times 2(30 - 2x) \times (-2) = (30 - 2x)[(30 - 2x) - 4x] = (30 - 2x)(30 - 6x)$$

$$V'(x) = 12(15 - x)(5 - x)$$

Sur $]0; 15[$, $15 - x > 0$, donc $V'(x)$ est du signe de $5 - x$. $V' > 0$ sur $]0; 5[$, $V'(5) = 0$ et $V' < 0$ sur $]5; 15[$. V est strictement croissante sur $]0; 5]$, puis strictement décroissante sur $]5; 15[$.

Conclusion. Le maximum est atteint en $x = 5$, avec $V(5) = 5 \times 20^2 = 2\,000$.

Le volume est maximal pour $x = 5$ cm et vaut $2\,000 \text{ cm}^3$.

Exercice 7 (★★) : optimisation, le coût moyen minimal

Une entreprise fabrique x milliers d'objets par mois ($x > 0$).

Le coût total de production, en milliers d'euros, est $C(x) = 0,1x^2 + 10x + 40$.

Le coût moyen d'un objet, en euros, est $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$.

Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ?

Quel est-il ?

Correction de l'exercice 7

Modélisation. Pour $x > 0$:

$$CM(x) = \frac{0,1x^2 + 10x + 40}{x} = 0,1x + 10 + \frac{40}{x}$$

Variations. La fonction CM est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$CM'(x) = 0,1 - \frac{40}{x^2} = \frac{0,1x^2 - 40}{x^2} = \frac{0,1(x - 20)(x + 20)}{x^2}$$

Pour $x > 0$, $x + 20 > 0$ et $x^2 > 0$, donc $CM'(x)$ est du signe de $x - 20$. CM est strictement décroissante sur $]0; 20]$ et strictement croissante sur $[20; +\infty[$. Son minimum est $CM(20) = 2 + 10 + 2 = 14$.

Le coût moyen est minimal pour une production de 20 milliers d'objets par mois, et il vaut alors 14 € par objet.

Exercice 8 (★★) : lire les variations sur la courbe de f'

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On lit sur la courbe de sa dérivée f' :

- $f'(x) > 0$ pour $x < -2$;
- $f'(-2) = 0$;
- $f'(x) < 0$ pour $-2 < x < 1$;
- $f'(1) = 0$;
- $f'(x) > 0$ pour $x > 1$.

Dresser le tableau de variations de f et préciser ses extremums locaux.

Correction de l'exercice 8

Variations. Le signe de f' donne le sens de variation de f :

- $f' > 0$ sur $] -\infty ; -2[$: f est strictement croissante sur $] -\infty ; -2]$.
- $f' < 0$ sur $] -2 ; 1[$: f est strictement décroissante sur $[-2 ; 1]$.
- $f' > 0$ sur $]1 ; +\infty[$: f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Extremums locaux. En -2 , f' s'annule en passant du positif au négatif.

f admet un maximum local en -2 .

En 1 , f' s'annule en passant du négatif au positif.

f admet un minimum local en 1 .

La courbe de f a des tangentes horizontales en ces deux points.

Remarque : on ne peut pas donner les valeurs $f(-2)$ et $f(1)$ avec la seule courbe de f' .

Ce qui peut tomber au bac

- Une **étude complète** avec limites, tableau, convexité et inflexion (exercices 1, 2, 5).
- Un **minimum qui donne une inégalité** (exercices 3 et 4).
- Une **détermination de paramètres** avant l'étude (exercice 5).
- Un **problème d'optimisation** avec conclusion en contexte (exercices 6 et 7).
- La **lecture graphique** de f' (exercice 8).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a ?

- A. $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ (**bonne réponse**)
- B. $y = f'(x)(x - a) + f(a)$
- C. $y = f(a)(x - a) + f'(a)$
- D. $y = f'(a)x$

Justification : La tangente passe par $(a; f(a))$ avec pour coefficient directeur $f'(a)$.

2. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^2$ en 1 ?

- A. $y = 2x$
- B. $y = x^2$
- C. $y = 2x + 1$
- D. $y = 2x - 1$ (**bonne réponse**)

Justification : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$: $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

3. Si $f'(a) = 0$, la tangente en a est :

- A. **horizontale** (**bonne réponse**)
- B. verticale
- C. oblique
- D. inexistante

Justification : Le coefficient directeur est nul : la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

4. Où la fonction $f(x) = x^3 - 3x$ admet-elle des extremums locaux ?

- A. seulement en $x = 0$
- B. nulle part
- C. en $x = 3$
- D. **en $x = -1$ et en $x = 1$** (**bonne réponse**)

Justification : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ s'annule en ± 1 en changeant de signe.

5. Pour étudier les variations d'une fonction dérivable, on étudie :

- A. la parité de f
- B. **le signe de f'** (**bonne réponse**)
- C. le signe de f
- D. la valeur de $f(0)$

Justification : $f' > 0$ sur un intervalle : f y est croissante. $f' < 0$: décroissante.

6. Dans l'exercice 1, avec $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, quel est le point d'inflexion de la courbe ?

- A. **$(2; -2)$**

- B. (1 ; 1)
- C. (1 ; 0) (**bonne réponse**)
- D. (0 ; 2)

Justification : $f''(x) = 6x - 6$ s'annule en 1 en changeant de signe, et $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$.

7. Dans l'exercice 2, avec $f(x) = xe^{-x}$, quelle est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$?

- A. $\frac{1}{e}$ (**bonne réponse**)
- B. 1
- C. e
- D. 0

Justification : $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$ s'annule en 1 en changeant de signe (croissante puis décroissante) : $f(1) = \frac{1}{e}$.

8. Dans l'exercice 3, avec $f(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $]0; +\infty[$, quelle inégalité en déduit-on pour tout $x > 0$?

- A. $e^x \geq ex$ (**bonne réponse**)
- B. $e^x \geq x$
- C. $e^x = ex$
- D. $e^x \leq ex$

Justification : Le minimum de f sur $]0; +\infty[$ est $f(1) = e$, donc $f(x) \geq e$ pour tout $x > 0$, soit $e^x \geq ex$.

9. Dans l'exercice 6 (la boîte en carton de côté 30 cm), pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ?

- A. $x = 10$ cm, pour un volume de 1 000 cm³
- B. $x = 0$ cm
- C. $x = 5$ cm, pour un volume de 2 000 cm³ (**bonne réponse**)
- D. $x = 15$ cm

Justification : $V(x) = x(30 - 2x)^2$ admet un maximum en $x = 5$, avec $V(5) = 5 \times 20^2 = 2\,000$ cm³.

10. Dans l'exercice 7, avec $C(x) = 0,1x^2 + 10x + 40$ (en milliers d'euros pour x milliers d'objets), pour quelle production le coût moyen est-il minimal ?

- A. 20 milliers d'objets, pour un coût moyen de 14 € par objet (**bonne réponse**)
- B. 40 milliers d'objets
- C. 4 milliers d'objets
- D. 10 milliers d'objets

Justification : $CM(x) = 0,1x + 10 + \frac{40}{x}$ est minimale en $x = 20$ (où $0,1 = \frac{40}{x^2}$), avec $CM(20) = 14$.