

Fiche 2 : dérivée seconde et convexité

Neuf exercices pour maîtriser la convexité : calculer f'' et étudier son signe, trouver les points d'inflexion, lire la convexité sur f' ou sur f'' , positionner une courbe par rapport à ses tangentes, traiter les vrai/faux classiques.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : deux fois dérivable justifié, f'' factorisée, signe justifié, théorème cité, points d'inflexion avec leurs deux coordonnées.

Le modèle de rédaction de la convexité

« La fonction f est deux fois dérivable sur I comme ... Pour tout x , $f'(x) = \dots$ et $f''(x) = \dots$. Or ... donc $f''(x)$ est du signe de ... Ainsi $f'' \geq 0$ sur ... : f est convexe sur ..., et $f'' \leq 0$ sur ... : f est concave sur ... Comme f'' s'annule en changeant de signe en a , le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe. »

Les pièges classiques

- Confondre **convexe** ($f'' \geq 0$, au-dessus des tangentes) et **concave** ($f'' \leq 0$).
- Conclure à un point d'inflexion quand f'' s'annule **sans changer de signe** (comme pour x^4 en 0).
- Donner l'abscisse du point d'inflexion mais pas son **ordonnée**.
- Confondre f' croissante et f croissante.

Pour ne jamais confondre : convexe ressemble à un sourire, concave à un chapeau de sorcière.

Exercice 1 (★) : étudier la convexité

Étudier la convexité et déterminer les éventuels points d'inflexion :

1. $f(x) = x^4 - 2x^2$

2. $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

3. $h(x) = e^x$

4. $k(x) = e^{-x^2}$

Exercice 2 (★★) : convexité, inflexion et tangente

Soit $f(x) = (x+1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer f' et f'' .
2. Étudier la convexité de f et déterminer le point d'inflexion.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe en ce point.

Exercice 3 (★★) : la convexité lue sur f'

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que f' est :

- croissante sur $] -\infty ; -1]$;
- décroissante sur $[-1 ; 2]$;
- croissante sur $[2 ; +\infty[$.

Étudier la convexité de f et ses points d'inflexion.

Exercice 4 (★★) : la convexité lue sur le signe de f''

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

- $f''(x) > 0$ sur $] -\infty ; -1[$;
- $f''(x) < 0$ sur $] -1 ; 3[$;
- $f''(x) > 0$ sur $]3 ; +\infty[$.

Étudier la convexité de f et déterminer les points d'inflexion. Que peut-on dire de f' en -1 et en 3 ?

Exercice 5 (★★) : position de la courbe par rapport à une tangente

1. Déterminer la tangente T à la courbe de l'exponentielle en 0 et en déduire une inégalité.
2. Étudier la position de la courbe de $x \mapsto x^3$ par rapport à sa tangente en 0 .
3. Étudier la position de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ par rapport à sa tangente en 1 .

Exercice 6 (★★★) : un paramètre pour un point d'inflexion

Soit $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x$, où a est un réel. Déterminer a pour que la courbe de f ait un point d'inflexion d'abscisse 2 .

Exercice 7 (★★★) : un produit avec exponentielle

Soit $f(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$. Étudier la convexité de f et déterminer le point d'inflexion.

Exercice 8 (★★★) : une inégalité par concavité

Montrer que, pour tout $x > -1$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 9 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si f est convexe sur I , alors f' est croissante sur I .
2. Si $f''(a) = 0$, alors le point d'abscisse a est un point d'inflexion.
3. La somme de deux fonctions convexes est convexe.
4. Le produit de deux fonctions convexes est convexe.
5. Si f est concave, alors $-f$ est convexe.
6. La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes.

Ce qui peut tomber au bac sur la convexité

- L'étude de la convexité avec f'' factorisée et les points d'inflexion (exercices 1, 2, 7).
- La lecture graphique : sur f' ou sur f'' (exercices 3 et 4).
- La position de la courbe et de sa tangente, qui donne des inégalités (exercices 5 et 8).
- Un paramètre imposé par un point d'inflexion (exercice 6).
- Un vrai/faux sur les propriétés de la convexité (exercice 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Une fonction f deux fois dérivable est convexe sur I si et seulement si :

- A. $f'' \geq 0$ sur I
- B. $f' \geq 0$ sur I
- C. $f'' \leq 0$ sur I
- D. $f \geq 0$ sur I

2. La courbe de $f(x) = x^3$ admet un point d'inflexion en :

- A. $x = 0$

- B. $x = 1$
- C. aucun point
- D. tous les points
3. La fonction exponentielle est :
- A. concave sur $\mathbb{R}$
- B. convexe sur $\mathbb{R}$
- C. convexe seulement sur $]0; +\infty[$
- D. ni convexe ni concave
4. Si f est concave sur I , sa courbe est située :
- A. sur ses tangentes
- B. de part et d'autre de ses tangentes
- C. au-dessous de ses tangentes
- D. au-dessus de ses tangentes
5. Que peut-on dire de $f(x) = -x^2 + 3x$?
- A. Elle est convexe sur $\mathbb{R}$
- B. Elle est concave sur $\mathbb{R}$
- C. Elle admet un point d'inflexion en $\frac{3}{2}$
- D. Elle est ni convexe ni concave
6. Dans l'exercice 1, où sont les points d'inflexion de $f(x) = x^4 - 2x^2$?
- A. en $x = 0$ seulement
- B. en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- C. il n'y en a pas
- D. en $x = -1$ et $x = 1$
7. Dans l'exercice 2, avec $f(x) = (x+1)e^{-x}$, quelle est l'équation de la tangente au point d'inflexion $\left(1; \frac{2}{e}\right)$?
- A. $y = x + 1$
- B. $y = \frac{2}{e}$
- C. $y = \frac{3-x}{e}$
- D. $y = \frac{x}{e}$
8. Dans l'exercice 3, si f' est croissante sur $] -\infty; -1]$, décroissante sur $[-1; 2]$ puis croissante sur $[2; +\infty[$, la fonction f est :
- A. convexe sur $] -\infty; -1]$ et $[2; +\infty[$, concave sur $[-1; 2]$
- B. concave partout

- C. convexe partout
- D. convexe seulement sur $[-1; 2]$
9. Dans l'exercice 6, pour quelle valeur de a la courbe de $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x$ a-t-elle un point d'inflexion d'abscisse 2 ?
- A. $a = -6$
- B. $a = 6$
- C. $a = 0$
- D. $a = 2$
10. Dans l'exercice 8, quelle inégalité démontre-t-on par concavité pour tout $x > -1$?
- A. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$
- B. $\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2}$
- C. $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$
- D. $\sqrt{1+x} \leq x$