

## Fiche 2 : dérivée seconde et convexité

Neuf exercices pour maîtriser la convexité : calculer  $f''$  et étudier son signe, trouver les points d'inflexion, lire la convexité sur  $f'$  ou sur  $f''$ , positionner une courbe par rapport à ses tangentes, traiter les vrai/faux classiques.

**Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac :** deux fois dérivable justifié,  $f''$  factorisée, signe justifié, théorème cité, points d'inflexion avec leurs deux coordonnées.

### Le modèle de rédaction de la convexité

« La fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$  comme ... Pour tout  $x$ ,  $f'(x) = \dots$  et  $f''(x) = \dots$ . Or ... donc  $f''(x)$  est du signe de ... Ainsi  $f'' \geq 0$  sur ... :  $f$  est convexe sur ..., et  $f'' \leq 0$  sur ... :  $f$  est concave sur ... Comme  $f''$  s'annule en changeant de signe en  $a$ , le point  $A(a; f(a))$  est un point d'inflexion de la courbe. »

### Les pièges classiques

- Confondre **convexe** ( $f'' \geq 0$ , au-dessus des tangentes) et **concave** ( $f'' \leq 0$ ).
- Conclure à un point d'inflexion quand  $f''$  s'annule **sans changer de signe** (comme pour  $x^4$  en 0).
- Donner l'abscisse du point d'inflexion mais pas son **ordonnée**.
- Confondre  $f'$  croissante et  $f$  croissante.

Pour ne jamais confondre : convexe ressemble à un sourire, concave à un chapeau de sorcière.

### Exercice 1 (★) : étudier la convexité

Étudier la convexité et déterminer les éventuels points d'inflexion :

1.  $f(x) = x^4 - 2x^2$

2.  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

3.  $h(x) = e^x$

4.  $k(x) = e^{-x^2}$

### Correction de l'exercice 1

Question 1

La fonction  $f$  est un polynôme, donc deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$$

$$f''(x) = 0 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Comme  $4(3x^2 - 1)$  est un trinôme positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles :

$$f'' > 0 \text{ sur } \left] -\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3} \right[ \text{ et sur } \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[, \text{ et } f'' < 0 \text{ sur } \left] -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[.$$

$$f \text{ est convexe sur } \left] -\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3} \right[ \text{ et sur } \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[, \text{ concave sur } \left] -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[.$$

Comme  $f''$  s'annule en changeant de signe en  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ , la courbe a deux points d'inflexion.

$$f\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{9}.$$

$$\text{Points d'inflexion : } \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5}{9}\right) \text{ et } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5}{9}\right)$$

Question 2

$g$  est un polynôme, deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$g'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$g''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$g''(x) < 0 \text{ si } x < 1, g''(1) = 0, g''(x) > 0 \text{ si } x > 1.$$

$$g \text{ est concave sur } ]-\infty; 1] \text{ et convexe sur } [1; +\infty[.$$

**Le point  $(1; g(1)) = (1; -1)$  est un point d'inflexion.**

Question 3

$h$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $h''(x) = e^x > 0$ .

**Donc  $h$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  ; elle n'a pas de point d'inflexion.**

Question 4

$k$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée.

$$k'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$k''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

Comme  $e^{-x^2} > 0$ ,  $k''(x)$  est du signe de  $2x^2 - 1$ , qui s'annule en  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$k \text{ est convexe sur } \left] -\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right[ \text{ et sur } \left] \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right[, \text{ concave sur } \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[.$$

$$\text{Points d'inflexion : } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; e^{-1/2}\right) \text{ et } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; e^{-1/2}\right)$$

**Exercice 2 (★★) : convexité, inflexion et tangente**

Soit  $f(x) = (x + 1)e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Calculer  $f'$  et  $f''$ .
2. Étudier la convexité de  $f$  et déterminer le point d'inflexion.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe en ce point.

**Correction de l'exercice 2**

## Question 1

$f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de fonctions dérivables.  $f'(x) = e^{-x} - (x + 1)e^{-x}$ .

$$f'(x) = -xe^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x}.$$

$$f''(x) = (x - 1)e^{-x}$$

## Question 2

Comme  $e^{-x} > 0$ ,  $f''(x)$  est du signe de  $x - 1$ .  $f'' < 0$  sur  $] -\infty ; 1[$ ,  $f''(1) = 0$ ,  $f'' > 0$  sur  $]1 ; +\infty[$ .

**$f$  est concave sur  $] -\infty ; 1]$  et convexe sur  $[1 ; +\infty[$ .**

Comme  $f''$  s'annule en changeant de signe en 1, le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion.  $f(1) = 2e^{-1}$ .

**Le point d'inflexion est  $\left(1; \frac{2}{e}\right)$ .**

## Question 3

$f'(1) = -e^{-1}$ . La tangente en ce point a pour équation  $y = \frac{2}{e} - \frac{1}{e}(x - 1)$ .

$$y = \frac{3 - x}{e}$$

Comme le point est un point d'inflexion, la courbe traverse cette tangente.

**Exercice 3 (★★) : la convexité lue sur  $f'$** 

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On sait que  $f'$  est :

- croissante sur  $] -\infty ; -1]$  ;
- décroissante sur  $[-1 ; 2]$  ;
- croissante sur  $[2 ; +\infty[$ .

Étudier la convexité de  $f$  et ses points d'inflexion.

**Correction de l'exercice 3**

**Méthode.** Une fonction deux fois dérivable est convexe sur un intervalle si et seulement si sa dérivée y est croissante. Elle est concave si et seulement si sa dérivée y est décroissante.

**Conclusion.**  $f'$  est croissante sur  $] -\infty ; -1]$  et sur  $[2 ; +\infty[$ .

$f$  est convexe sur  $] -\infty ; -1]$  et sur  $[2 ; +\infty[$ .

$f'$  est décroissante sur  $[-1 ; 2]$ .

$f$  est concave sur  $[-1 ; 2]$ .

La convexité change en  $x = -1$  (de convexe à concave) et en  $x = 2$  (de concave à convexe).

**La courbe a deux points d'inflexion, d'abscisses  $-1$  et  $2$ , là où  $f'$  admet un extremum local.**

**Exercice 4 (★★) : la convexité lue sur le signe de  $f''$** 

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec :

- $f''(x) > 0$  sur  $] -\infty ; -1[$  ;
- $f''(x) < 0$  sur  $] -1 ; 3[$  ;
- $f''(x) > 0$  sur  $]3 ; +\infty[$ .

Étudier la convexité de  $f$  et déterminer les points d'inflexion. Que peut-on dire de  $f'$  en  $-1$  et en  $3$  ?

**Correction de l'exercice 4**

**Méthode.**  $f'' \geq 0$  sur un intervalle signifie que  $f$  est convexe ;  $f'' \leq 0$  qu'elle est concave.

**Convexité.** Sur  $] -\infty ; -1]$  :  $f'' \geq 0$ .

$f$  est convexe.

Sur  $[-1 ; 3]$  :  $f'' \leq 0$ .

$f$  est concave.

Sur  $[3; +\infty[ : f'' \geq 0$ .

$f$  est convexe.

**Points d'inflexion.**  $f''$  s'annule en  $-1$  et en  $3$  (par continuité de  $f''$  si elle est continue) en changeant de signe.

**La courbe a deux points d'inflexion, d'abscisses  $-1$  et  $3$ .**

**La dérivée  $f'$ .** Comme  $f''$  donne les variations de  $f'$  :  $f'$  est croissante sur  $] -\infty; -1]$ , décroissante sur  $[-1; 3]$  et croissante sur  $[3; +\infty[$ .

$f'$  admet un maximum local en  $-1$  et un minimum local en  $3$ .

### Exercice 5 (★★) : position de la courbe par rapport à une tangente

1. Déterminer la tangente  $T$  à la courbe de l'exponentielle en  $0$  et en déduire une inégalité.
2. Étudier la position de la courbe de  $x \mapsto x^3$  par rapport à sa tangente en  $0$ .
3. Étudier la position de la courbe de  $x \mapsto \sqrt{x}$  par rapport à sa tangente en  $1$ .

#### Correction de l'exercice 5

##### Question 1

Pour  $\exp$ ,  $\exp'(0) = 1$  et  $\exp(0) = 1$ .  $T$  a pour équation  $y = 1 + 1(x - 0)$ .

$$T : y = x + 1$$

Comme  $\exp'' = \exp > 0$ , l'exponentielle est convexe sur  $\mathbb{R}$  : sa courbe est au-dessus de ses tangentes.

**Donc  $e^x \geq x + 1$  pour tout réel  $x$ .**

##### Question 2

Pour  $f(x) = x^3$  :  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ , la tangente en  $0$  est  $y = 0$ . Or  $f(x) - 0 = x^3$  est négatif pour  $x < 0$  et positif pour  $x > 0$ .

**La courbe traverse sa tangente en  $0$** , qui est donc un point d'inflexion.

( $f''(x) = 6x$  change de signe en  $0$ .)

##### Question 3

Pour  $g(x) = \sqrt{x}$  sur  $]0; +\infty[ : g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  et  $g''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$ , donc  $g$  est concave.

La tangente en 1 a pour équation  $y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{x+1}{2}$ . Comme  $g$  est concave, sa courbe est en dessous de sa tangente.

$$\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2} \text{ pour } x > 0 \text{ (et l'inégalité reste vraie en 0).}$$

### Exercice 6 (★★★) : un paramètre pour un point d'inflexion

Soit  $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x$ , où  $a$  est un réel. Déterminer  $a$  pour que la courbe de  $f$  ait un point d'inflexion d'abscisse 2.

#### Correction de l'exercice 6

**Les dérivées.**  $f$  est un polynôme, deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

**La condition.** Il y a un point d'inflexion d'abscisse 2 si et seulement si  $f''$  s'annule en changeant de signe en 2. Or  $f''(2) = 12 + 2a = 0 \iff a = -6$ .

**Vérification du changement de signe.** Pour  $a = -6$ ,  $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$ . Il est négatif pour  $x < 2$  et positif pour  $x > 2$  : il y a bien un changement de signe.

**Donc**  $a = -6$ .

### Exercice 7 (★★★) : un produit avec exponentielle

Soit  $f(x) = xe^x$  sur  $\mathbb{R}$ . Étudier la convexité de  $f$  et déterminer le point d'inflexion.

#### Correction de l'exercice 7

$f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de fonctions dérivables.

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$f''(x) = e^x + (x+1)e^x$$

$$f''(x) = (x+2)e^x$$

Comme  $e^x > 0$ ,  $f''(x)$  est du signe de  $x+2$ .  $f'' < 0$  sur  $] -\infty; -2[$  et  $f'' > 0$  sur  $] -2; +\infty[$ .

**$f$  est concave sur  $] -\infty; -2]$  et convexe sur  $[-2; +\infty[$ .**

Comme  $f''$  s'annule en changeant de signe en  $-2$  :

le point  $(-2; -2e^{-2})$  est un point d'inflexion.

### Exercice 8 (★★★) : une inégalité par concavité

Montrer que, pour tout  $x > -1$ ,  $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ .

#### Correction de l'exercice 8

Soit  $g(x) = \sqrt{1+x}$  sur  $] -1; +\infty[$ . La fonction  $g$  est deux fois dérivable sur cet intervalle.

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$g''(x) = -\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}} < 0$$

Donc  $g$  est concave sur  $] -1; +\infty[$  : sa courbe est en dessous de chacune de ses tangentes.

La tangente en 0 a pour équation  $y = g(0) + g'(0)x = 1 + \frac{x}{2}$ .

**Donc, pour tout  $x > -1$ ,  $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ .**

### Exercice 9 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Si  $f$  est convexe sur  $I$ , alors  $f'$  est croissante sur  $I$ .
2. Si  $f''(a) = 0$ , alors le point d'abscisse  $a$  est un point d'inflexion.
3. La somme de deux fonctions convexes est convexe.
4. Le produit de deux fonctions convexes est convexe.
5. Si  $f$  est concave, alors  $-f$  est convexe.
6. La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes.

#### Correction de l'exercice 9

Affirmation 1

Pour une fonction deux fois dérivable,  $f$  convexe équivaut à  $f'$  croissante.

**Vrai.**

Affirmation 2

Il faut que  $f''$  change de signe. Contre-exemple :  $f(x) = x^4$ ,  $f''(x) = 12x^2$  s'annule en 0 sans changer de signe ( $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ ), donc pas d'inflexion en 0.

**Faux.**

Affirmation 3

Si  $f'' \geq 0$  et  $g'' \geq 0$ , alors  $(f + g)'' = f'' + g'' \geq 0$ .

**Vrai.**

Affirmation 4

Contre-exemple :  $f(x) = x$  et  $g(x) = -x$  sont convexes (fonctions affines), mais  $f(x)g(x) = -x^2$  est concave.

**Faux.**

Affirmation 5

$(-f)'' = -f'' \geq 0$  si  $f'' \leq 0$ .

**Vrai.**

Affirmation 6

C'est la définition de la convexité.

**Vrai.**

### Ce qui peut tomber au bac sur la convexité

- L'étude de la convexité avec  $f''$  factorisée et les points d'inflexion (exercices 1, 2, 7).
- La lecture graphique : sur  $f'$  ou sur  $f''$  (exercices 3 et 4).
- La position de la courbe et de sa tangente, qui donne des inégalités (exercices 5 et 8).
- Un paramètre imposé par un point d'inflexion (exercice 6).
- Un vrai/faux sur les propriétés de la convexité (exercice 9).

## QCM : une seule bonne réponse par question

1. Une fonction  $f$  deux fois dérivable est convexe sur  $I$  si et seulement si :

- A.  $f'' \geq 0$  sur  $I$  (bonne réponse)
- B.  $f' \geq 0$  sur  $I$
- C.  $f'' \leq 0$  sur  $I$
- D.  $f \geq 0$  sur  $I$

*Justification* : La convexité se lit sur le signe de la dérivée seconde.

2. La courbe de  $f(x) = x^3$  admet un point d'inflexion en :

- A.  $x = 0$  (**bonne réponse**)
- B.  $x = 1$
- C. aucun point
- D. tous les points

*Justification* :  $f''(x) = 6x$  change de signe en  $0$  : la courbe passe de concave à convexe.

3. La fonction exponentielle est :

- A. concave sur  $\mathbb{R}$
- B. **convexe sur  $\mathbb{R}$  (bonne réponse)**
- C. convexe seulement sur  $]0; +\infty[$
- D. ni convexe ni concave

*Justification* :  $(e^x)'' = e^x > 0$  pour tout réel  $x$ .

4. Si  $f$  est concave sur  $I$ , sa courbe est située :

- A. sur ses tangentes
- B. de part et d'autre de ses tangentes
- C. **au-dessous de ses tangentes (bonne réponse)**
- D. au-dessus de ses tangentes

*Justification* : Concave : courbe sous ses tangentes. Convexe : courbe au-dessus.

5. Que peut-on dire de  $f(x) = -x^2 + 3x$  ?

- A. Elle est convexe sur  $\mathbb{R}$
- B. **Elle est concave sur  $\mathbb{R}$  (bonne réponse)**
- C. Elle admet un point d'inflexion en  $\frac{3}{2}$
- D. Elle est ni convexe ni concave

*Justification* :  $f''(x) = -2 < 0$  : la fonction est concave, sans point d'inflexion.

6. Dans l'exercice 1, où sont les points d'inflexion de  $f(x) = x^4 - 2x^2$  ?

- A. en  $x = 0$  seulement
- B. **en  $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  et  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  (bonne réponse)**
- C. il n'y en a pas
- D. en  $x = -1$  et  $x = 1$

*Justification* :  $f''(x) = 12x^2 - 4$  s'annule et change de signe en  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

7. Dans l'exercice 2, avec  $f(x) = (x+1)e^{-x}$ , quelle est l'équation de la tangente au point d'inflexion  $\left(1; \frac{2}{e}\right)$  ?

- A.  $y = x + 1$
- B.  $y = \frac{2}{e}$
- C.  $y = \frac{3-x}{e}$  (bonne réponse)
- D.  $y = \frac{x}{e}$

*Justification* : On calcule  $f'(1) = -e^{-1}$  et on écrit  $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -\frac{x-1}{e} + \frac{2}{e} = \frac{3-x}{e}$ .

8. Dans l'exercice 3, si  $f'$  est croissante sur  $] -\infty ; -1]$ , décroissante sur  $[-1 ; 2]$  puis croissante sur  $[2 ; +\infty[$ , la fonction  $f$  est :

- A. **convexe sur  $] -\infty ; -1]$  et  $[2 ; +\infty[$ , concave sur  $[-1 ; 2]$**  (bonne réponse)
- B. concave partout
- C. convexe partout
- D. convexe seulement sur  $[-1 ; 2]$

*Justification* : Le sens de variation de  $f'$  donne le signe de  $f''$ , donc la convexité de  $f$  (convexe là où  $f'$  croît).

9. Dans l'exercice 6, pour quelle valeur de  $a$  la courbe de  $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x$  a-t-elle un point d'inflexion d'abscisse 2 ?

- A.  $a = -6$  (bonne réponse)
- B.  $a = 6$
- C.  $a = 0$
- D.  $a = 2$

*Justification* :  $f''(x) = 6x + 2a$  s'annule en 2 quand  $12 + 2a = 0$ , soit  $a = -6$ .

10. Dans l'exercice 8, quelle inégalité démontre-t-on par concavité pour tout  $x > -1$  ?

- A.  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$
- B.  $\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2}$
- C.  $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$  (bonne réponse)
- D.  $\sqrt{1+x} \leq x$

*Justification* : La fonction racine carrée est concave : sa courbe reste sous sa tangente en 1, ce qui donne l'inégalité pour  $x > -1$ .