

Fiche 1 : dérivées, composées et tangentes

Dix exercices pour maîtriser tous les calculs de dérivées du programme : puissances, racines, exponentielles, quotients, fonctions trigonométriques composées, tangentes, taux d'accroissement, détermination de paramètres.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : domaine, dérivabilité justifiée, formule citée, résultat factorisé, conclusion.

Le modèle de rédaction d'une dérivée

« La fonction f est dérivable sur I comme ... (somme, produit, quotient, composée) de fonctions dérivables sur I (et dénominateur non nul). Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dots$ »

- Repère d'abord la **structure** : somme, produit, quotient ou composée.
- Cite la formule utilisée, puis identifie u et u' .
- **Factorise** le résultat : c'est ce qui rend le signe lisible.

Les pièges classiques

- Oublier le facteur u' dans une composée.
- Dériver un produit comme le produit des dérivées.
- Dériver une racine ou un inverse **sans vérifier le domaine**.
- Se tromper sur les signes dans un quotient ($u'v - uv'$).
- Écrire l'équation d'une tangente sans avoir calculé $f(a)$.

Un facteur oublié dans une dérivée se répercute sur tout le reste de l'exercice, comme une faute d'inattention dans une recette : le gâteau est raté.

Exercice 1 (★) : les puissances de u

Dériver :

1. $f(x) = (2x + 1)^5$

2. $g(x) = (x^2 - 3x + 1)^4$

3. $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

4. $k(x) = \frac{1}{(3x - 2)^3} \text{ sur } \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$

Exercice 2 (★) : les racines

Dériver, en précisant l'ensemble de dérivabilité :

1. $f(x) = \sqrt{2x+1}$

2. $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

3. $h(x) = \sqrt{x^2-4x}$

4. $k(x) = x\sqrt{x+1}$

Exercice 3 (★) : les exponentielles composées

Dériver sur $\mathbb{R}$ (ou sur $]0; +\infty[$ pour la question 3) :

1. $f(x) = e^{3x-1}$

2. $g(x) = e^{-x^2}$

3. $h(x) = e^{1/x}$

4. $k(x) = xe^{2x}$

5. $m(x) = (x^2+x)e^{-x}$

Exercice 4 (★★) : les quotients

Dériver, en précisant l'ensemble de dérivabilité :

1. $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

2. $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

3. $h(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

Exercice 5 (★★) : trigonométrie composée

Dériver sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \cos(2x+1)$

2. $g(x) = \sin^2 x$ (c'est-à-dire $(\sin x)^2$)

3. $h(x) = e^x \cos x$

4. $k(x) = \sin(x^2)$

Exercice 6 (★★) : équations de tangentes

1. Soit $f(x) = xe^x$. Déterminer les tangentes à sa courbe aux points d'abscisses 0 et 1.
2. Soit $g(x) = \sqrt{x}$. Déterminer la tangente à sa courbe au point d'abscisse 4.

Exercice 7 (★★) : tangente de pente donnée, tangente passant par un point

1. Soit $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Déterminer la tangente à sa courbe qui a pour coefficient directeur 1.
2. Soit $g(x) = x^2 + 1$. Déterminer les tangentes à sa courbe qui passent par l'origine O .

Exercice 8 (★★★) : taux d'accroissement et dérivabilité en un point

1. Calculer le taux d'accroissement de $f(x) = x^2$ en a et en déduire $f'(a)$.
2. La fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ? Interpréter.
3. La fonction $h(x) = x|x|$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 9 (★★★) : déterminer des paramètres

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$, où a et b sont deux réels.

On sait que la courbe de f passe par $A(0; 1)$ et admet en A une tangente horizontale.

Déterminer a et b .

Exercice 10 (★★) : variations d'une composée

Soit $f(x) = e^{x^2 - 2x}$ sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de f .

Ce qui peut tomber au bac

- Des **dérivées de composées** avec e^u , $\sqrt{u}$, u^n (exercices 1 à 3, 10).
- Un **quotient** à dériver puis à étudier en signe (exercice 4).
- Une **équation de tangente** (exercices 6 et 7).
- La **dérivabilité en un point** avec le taux d'accroissement (exercice 8).
- La **détermination de paramètres** avec des conditions sur la courbe (exercice 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la dérivée de e^{2x+1} ?
 - A. $(2x + 1)e^{2x}$
 - B. $2e^{2x}$
 - C. $2e^{2x+1}$
 - D. e^{2x+1}
2. Quelle est la dérivée de $(3x^2 + 1)^4$?
 - A. $24x(3x^2 + 1)^4$
 - B. $6x(3x^2 + 1)^3$
 - C. $4(3x^2 + 1)^3$
 - D. $24x(3x^2 + 1)^3$
3. Quelle est la dérivée de $\sqrt{x^2 + 1}$?
 - A. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 - B. $\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}$
 - C. $\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 - D. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$
4. Quelle est la dérivée de xe^x ?
 - A. xe^x
 - B. e^x
 - C. $(x - 1)e^x$
 - D. $(x + 1)e^x$
5. Quelle est la dérivée de e^{-x^2} ?
 - A. $-2xe^{-x^2}$
 - B. e^{-x^2}
 - C. $-xe^{-x^2}$
 - D. $2xe^{-x^2}$
6. Dans l'exercice 1, quelle est la dérivée de $f(x) = (2x + 1)^5$?
 - A. $10(2x + 1)^4$
 - B. $2(2x + 1)^4$
 - C. $5(2x + 1)^4$
 - D. $10(2x + 1)^5$
7. Dans l'exercice 3, quelle est la dérivée de $k(x) = xe^{2x}$?

- A. $(1 + 2x)e^{2x}$
 - B. $2e^{2x}$
 - C. $(1 - 2x)e^{2x}$
 - D. e^{2x}
8. Dans l'exercice 5, quelle est la dérivée de $g(x) = \sin^2 x$?
- A. $-2 \sin x \cos x$
 - B. $2 \cos x$
 - C. $\cos^2 x$
 - D. $2 \sin x \cos x$
9. Dans l'exercice 6, quelle est l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = xe^x$ au point d'abscisse 0 ?
- A. $y = x + 1$
 - B. $y = ex$
 - C. $y = x$
 - D. $y = 0$
10. Dans l'exercice 9, avec $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ passant par $A(0; 1)$ avec une tangente horizontale en A , que valent a et b ?
- A. $a = 0$ et $b = 1$
 - B. $a = 1$ et $b = 1$
 - C. $a = -1$ et $b = 1$
 - D. $a = 1$ et $b = 0$