

Fiche 1 : dérivées, composées et tangentes

Dix exercices pour maîtriser tous les calculs de dérivées du programme : puissances, racines, exponentielles, quotients, fonctions trigonométriques composées, tangentes, taux d'accroissement, détermination de paramètres.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend au bac : domaine, dérivabilité justifiée, formule citée, résultat factorisé, conclusion.

Le modèle de rédaction d'une dérivée

« La fonction f est dérivable sur I comme ... (somme, produit, quotient, composée) de fonctions dérivables sur I (et dénominateur non nul). Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dots$ »

- Repère d'abord la **structure** : somme, produit, quotient ou composée.
- Cite la formule utilisée, puis identifie u et u' .
- **Factorise** le résultat : c'est ce qui rend le signe lisible.

Les pièges classiques

- Oublier le facteur u' dans une composée.
- Dériver un produit comme le produit des dérivées.
- Dériver une racine ou un inverse **sans vérifier le domaine**.
- Se tromper sur les signes dans un quotient ($u'v - uv'$).
- Écrire l'équation d'une tangente sans avoir calculé $f(a)$.

Un facteur oublié dans une dérivée se répercute sur tout le reste de l'exercice, comme une faute d'inattention dans une recette : le gâteau est raté.

Exercice 1 (★) : les puissances de u

Dériver :

1. $f(x) = (2x + 1)^5$

2. $g(x) = (x^2 - 3x + 1)^4$

3. $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

4. $k(x) = \frac{1}{(3x - 2)^3} \text{ sur } \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$

Correction de l'exercice 1

Question 1

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de $x \mapsto 2x + 1$ et de $x \mapsto x^5$, dérivables sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$ et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$:

$$f'(x) = 5 \times 2 \times (2x + 1)^4 = 10(2x + 1)^4$$

Question 2

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. Avec $u(x) = x^2 - 3x + 1$, $u'(x) = 2x - 3$, $n = 4$:

$$g'(x) = 4(2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^3$$

Question 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$. Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas. Avec $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$ et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$:

$$h'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Question 4

Pour $x > \frac{2}{3}$, $3x - 2 > 0$, donc k est dérivable sur $\left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$. On écrit $k(x) = (3x - 2)^{-3}$.

Avec $u(x) = 3x - 2$, $u'(x) = 3$ et $n = -3$: $k'(x) = -3 \times 3 \times (3x - 2)^{-4}$.

$$k'(x) = \frac{-9}{(3x - 2)^4}$$

Exercice 2 (★) : les racines

Dériver, en précisant l'ensemble de dérivabilité :

1. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

2. $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

3. $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

4. $k(x) = x\sqrt{x + 1}$

Correction de l'exercice 2

Question 1

Pour $x > -\frac{1}{2}$, $2x + 1 > 0$. Donc f est dérivable sur $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ comme composée de $x \mapsto 2x + 1$ (strictement positive) et de la racine carrée. Avec $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$:

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

Question 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Question 3

La fonction h est définie pour $x^2 - 4x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 0$ ou $x \geq 4$. Elle est dérivable là où $x^2 - 4x > 0$, soit sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]4 ; +\infty[$. Sur ces intervalles :

$$h'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}}$$

Question 4

La fonction k est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$ comme produit de $x \mapsto x$ et de $x \mapsto \sqrt{x+1}$, dérivables sur cet intervalle. Avec $(uv)' = u'v + uv'$:

$$k'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+1) + x}{2\sqrt{x+1}}$$

$$k'(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

Exercice 3 (★) : les exponentielles composées

Dériver sur $\mathbb{R}$ (ou sur $]0 ; +\infty[$ pour la question 3) :

1. $f(x) = e^{3x-1}$
2. $g(x) = e^{-x^2}$
3. $h(x) = e^{1/x}$
4. $k(x) = xe^{2x}$
5. $m(x) = (x^2 + x)e^{-x}$

Correction de l'exercice 3

Méthode. On utilise $(e^u)' = u'e^u$.

Question 1

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée. Avec $u(x) = 3x - 1$, $u'(x) = 3$:

$$f'(x) = 3e^{3x-1}$$

Question 2

Avec $u(x) = -x^2$, $u'(x) = -2x$:

$$g'(x) = -2xe^{-x^2}$$

Question 3

La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ (et sur $] -\infty; 0[$), car $x \mapsto \frac{1}{x}$ y est dérivable. Avec

$$u(x) = \frac{1}{x}, u'(x) = -\frac{1}{x^2} :$$

$$h'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

Question 4

k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit. $(uv)'$ avec $u(x) = x$, $v(x) = e^{2x}$, $v'(x) = 2e^{2x}$: $k'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$.

$$k'(x) = (1 + 2x)e^{2x}$$

Question 5

m est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit. Avec $u(x) = x^2 + x$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$:

$$m'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x)e^{-x} = e^{-x}(2x + 1 - x^2 - x)$$

$$m'(x) = (-x^2 + x + 1)e^{-x}$$

Exercice 4 (★★) : les quotients

Dériver, en précisant l'ensemble de dérivabilité :

$$1. f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$2. g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

$$3. h(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

Correction de l'exercice 4

Méthode. On utilise $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Question 1

Pour tout x , $e^x + 1 > 0$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec $u = e^x - 1$, $v = e^x + 1$, $u' = v' = e^x$:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x[(e^x + 1) - (e^x - 1)]}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Question 2

La fonction g est dérivable sur $] -\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$. Avec $u = x^2 + 1$, $v = x - 1$:

$$g'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

Question 3

Pour tout x , $x^2 + 1 > 0$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$h'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Comme $h'(x) \geq 0$, la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (★★) : trigonométrie composée

Dériver sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \cos(2x + 1)$
2. $g(x) = \sin^2 x$ (c'est-à-dire $(\sin x)^2$)
3. $h(x) = e^x \cos x$
4. $k(x) = \sin(x^2)$

Correction de l'exercice 5

Question 1

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée. Avec $(\cos u)' = -u' \sin u$, $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$:

$$f'(x) = -2 \sin(2x + 1)$$

Question 2

$g = u^2$ avec $u(x) = \sin x$, $u'(x) = \cos x$. Avec $(u^2)' = 2u'u$:

$$g'(x) = 2 \sin x \cos x$$

Question 3

h est un produit de fonctions dérivables. $h'(x) = e^x \cos x + e^x(-\sin x)$.

$$h'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$$

Question 4

Avec $(\sin u)' = u' \cos u$, $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$:

$$k'(x) = 2x \cos(x^2)$$

Exercice 6 (★★) : équations de tangentes

1. Soit $f(x) = xe^x$. Déterminer les tangentes à sa courbe aux points d'abscisses 0 et 1.
2. Soit $g(x) = \sqrt{x}$. Déterminer la tangente à sa courbe au point d'abscisse 4.

Correction de l'exercice 6

Méthode. La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Question 1

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$.

En 0 : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. La tangente a pour équation $y = 0 + 1(x - 0)$.

$$y = x$$

En 1 : $f(1) = e$ et $f'(1) = 2e$. La tangente a pour équation $y = e + 2e(x - 1)$.

$$y = 2ex - e$$

Question 2

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. En 4 : $g(4) = 2$ et $g'(4) = \frac{1}{4}$. La tangente a pour équation $y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$.

$$y = \frac{x}{4} + 1$$

Exercice 7 (★★) : tangente de pente donnée, tangente passant par un point

1. Soit $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Déterminer la tangente à sa courbe qui a pour coefficient directeur 1.
2. Soit $g(x) = x^2 + 1$. Déterminer les tangentes à sa courbe qui passent par l'origine O .

Correction de l'exercice 7

Question 1

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 3$. On cherche a tel que $f'(a) = 1 : 2a - 3 = 1$, donc $a = 2$. On a $f(2) = 4 - 6 + 1 = -1$. La tangente a pour équation $y = -1 + 1(x - 2)$.

$$y = x - 3$$

Question 2

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2x$. La tangente au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = g(a) + g'(a)(x - a) = a^2 + 1 + 2a(x - a)$$

Elle passe par $O(0; 0)$ si et seulement si $0 = a^2 + 1 - 2a^2$, soit $a^2 = 1$. Donc $a = 1$ ou $a = -1$.

Pour $a = 1 : g(1) = 2, g'(1) = 2$.

$$y = 2x$$

Pour $a = -1 : g(-1) = 2, g'(-1) = -2$.

$$y = -2x$$

Il y a donc deux tangentes passant par l'origine.

Exercice 8 (★★★) : taux d'accroissement et dérivabilité en un point

1. Calculer le taux d'accroissement de $f(x) = x^2$ en a et en déduire $f'(a)$.
2. La fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ? Interpréter.
3. La fonction $h(x) = x|x|$ est-elle dérivable en 0 ?

Correction de l'exercice 8

Question 1

Pour $x \neq a$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$$

Quand $x \rightarrow a$, cette quantité tend vers $2a$.

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Question 2

Pour $x > 0$:

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Cette quantité tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$. La limite est infinie.

g n'est pas dérivable en 0.

La courbe admet en 0 une tangente verticale (l'axe des ordonnées).

Question 3

Pour $x \neq 0$:

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x|$$

Cette quantité tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$.

Donc h est dérivable en 0 et $h'(0) = 0$.

Exercice 9 (★★★) : déterminer des paramètres

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$, où a et b sont deux réels.

On sait que la courbe de f passe par $A(0; 1)$ et admet en A une tangente horizontale.

Déterminer a et b .

Correction de l'exercice 9

La dérivée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit. Pour tout x :

$$f'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (a - ax - b)e^{-x}$$

Les conditions.

- La courbe passe par $A(0; 1)$: $f(0) = b = 1$.
- La tangente en A est horizontale : $f'(0) = a - b = 0$, donc $a = b = 1$.

Donc $a = 1$ et $b = 1$, et $f(x) = (x + 1)e^{-x}$.

Vérification : $f(0) = 1$ et $f'(x) = -xe^{-x}$, donc $f'(0) = 0$

Exercice 10 (★★) : variations d'une composée

Soit $f(x) = e^{x^2 - 2x}$ sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de f .

Correction de l'exercice 10

La dérivée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de $x \mapsto x^2 - 2x$ et de l'exponentielle. Avec $u(x) = x^2 - 2x$, $u'(x) = 2x - 2$:

$$f'(x) = (2x - 2)e^{x^2-2x} = 2(x - 1)e^{x^2-2x}$$

Le signe. Comme $e^{x^2-2x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x - 1$: $f'(x) < 0$ si $x < 1$, $f'(1) = 0$, $f'(x) > 0$ si $x > 1$.

La fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 1]$ et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Elle admet un minimum en $x = 1$, égal à $f(1) = e^{-1}$.

Le minimum est $\frac{1}{e}$.

Ce qui peut tomber au bac

- Des **dérivées de composées** avec e^u , $\sqrt{u}$, u^n (exercices 1 à 3, 10).
- Un **quotient** à dériver puis à étudier en signe (exercice 4).
- Une **équation de tangente** (exercices 6 et 7).
- La **dérivabilité en un point** avec le taux d'accroissement (exercice 8).
- La **détermination de paramètres** avec des conditions sur la courbe (exercice 9).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelle est la dérivée de e^{2x+1} ?

- A. $(2x + 1)e^{2x}$
- B. $2e^{2x}$
- C. $2e^{2x+1}$ (bonne réponse)
- D. e^{2x+1}

Justification : $(e^u)' = u'e^u$ avec $u = 2x + 1$ et $u' = 2$.

2. Quelle est la dérivée de $(3x^2 + 1)^4$?

- A. $24x(3x^2 + 1)^4$
- B. $6x(3x^2 + 1)^3$
- C. $4(3x^2 + 1)^3$
- D. $24x(3x^2 + 1)^3$ (bonne réponse)

Justification : $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ avec $u = 3x^2 + 1$, $u' = 6x$ et $n = 4$.

3. Quelle est la dérivée de $\sqrt{x^2 + 1}$?

- A. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ (bonne réponse)

- B. $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$
 C. $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$
 D. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

Justification : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

4. Quelle est la dérivée de xe^x ?

- A. xe^x
 B. e^x
 C. $(x-1)e^x$
 D. $(x+1)e^x$ (**bonne réponse**)

Justification : Produit : $(uv)' = u'v + uv' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$.

5. Quelle est la dérivée de e^{-x^2} ?

- A. $-2xe^{-x^2}$ (**bonne réponse**)
 B. e^{-x^2}
 C. $-xe^{-x^2}$
 D. $2xe^{-x^2}$

Justification : $u = -x^2$, $u' = -2x$, donc $(e^u)' = -2xe^{-x^2}$.

6. Dans l'exercice 1, quelle est la dérivée de $f(x) = (2x+1)^5$?

- A. $10(2x+1)^4$ (**bonne réponse**)
 B. $2(2x+1)^4$
 C. $5(2x+1)^4$
 D. $10(2x+1)^5$

Justification : $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ avec $u = 2x+1$, $u' = 2$, $n = 5$: $5 \times 2 \times (2x+1)^4$.

7. Dans l'exercice 3, quelle est la dérivée de $k(x) = xe^{2x}$?

- A. $(1+2x)e^{2x}$ (**bonne réponse**)
 B. $2e^{2x}$
 C. $(1-2x)e^{2x}$
 D. e^{2x}

Justification : Produit : $(uv)' = u'v + uv' = e^{2x} + x \times 2e^{2x} = (1+2x)e^{2x}$.

8. Dans l'exercice 5, quelle est la dérivée de $g(x) = \sin^2 x$?

- A. $-2 \sin x \cos x$
 B. $2 \cos x$
 C. $\cos^2 x$

D. $2 \sin x \cos x$ (bonne réponse)

Justification : $g = u^2$ avec $u = \sin x$: $g' = 2u'u = 2 \cos x \sin x$.

9. Dans l'exercice 6, quelle est l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = xe^x$ au point d'abscisse 0 ?

A. $y = x + 1$

B. $y = ex$

C. $y = x$ (bonne réponse)

D. $y = 0$

Justification : $f(0) = 0$ et $f'(x) = (1+x)e^x$ donne $f'(0) = 1$: la tangente est $y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$.

10. Dans l'exercice 9, avec $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ passant par $A(0;1)$ avec une tangente horizontale en A , que valent a et b ?

A. $a = 0$ et $b = 1$

B. $a = 1$ et $b = 1$ (bonne réponse)

C. $a = -1$ et $b = 1$

D. $a = 1$ et $b = 0$

Justification : $f(0) = b = 1$, et $f'(0) = a - b = 0$ (tangente horizontale) donne $a = b = 1$.