

Dérivation et convexité : le cours

La dérivée mesure la **vitesse de variation** d'une fonction : elle dit si la courbe monte ou descend, et à quelle vitesse. La **dérivée seconde** mesure comment cette vitesse elle-même évolue : elle dit si la courbe « se creuse » (convexe) ou « s'arrondit » (concave).

C'est l'outil de toutes les études de fonctions du bac :

- variations ;
- tangentes ;
- extremums ;
- inégalités ;
- optimisation.

Dans tout le cours, tu verras des astuces , des pièges et un peu d'humour .

Comment utiliser ce cours

- Lis une partie, puis fais tout de suite la fiche correspondante.
- Apprends par cœur le tableau des dérivées de la partie 1 : chaque erreur de dérivée coûte l'exercice entier.
- Le Guide de rédaction du chapitre (dernière leçon) te donne les phrases exactes à écrire.

1. Les dérivées à connaître par cœur

Fonctions usuelles :

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\sin x)' = \cos x$

Somme et produit par un réel :

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(ku)' = k u'$

Produit : $(uv)' = u'v + uv'$

Quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. En particulier $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

2. Dérivée d'une composée

Si u est dérivable en x et si g est dérivable en $u(x)$, alors $g \circ u$ est dérivable en x et :

$$(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

On dérive « l'extérieur » sans toucher à l'intérieur, puis on multiplie par la dérivée de l'intérieur. Cela donne les formules à connaître (u dérivable, avec les conditions nécessaires) :

- $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ (n entier relatif ; pour n négatif, u ne s'annule pas)
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (u strictement positive)
- $(e^u)' = u' e^u$
- $(\cos u)' = -u' \sin u$
- $(\sin u)' = u' \cos u$
- $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ (u ne s'annule pas)

Cas particulier utile : $(f(ax + b))' = a f'(ax + b)$.

Exemples.

$$(e^{3x-1})' = 3e^{3x-1}$$

$$(\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$((2x + 1)^5)' = 5 \times 2 \times (2x + 1)^4 = 10(2x + 1)^4$$

Pièges :

- Oublier de multiplier par u' : $(e^{x^2})'$ n'est pas e^{x^2} , c'est $2xe^{x^2}$.
- Confondre $(u^n)'$ avec nu^{n-1} : il manque le facteur u' .
- Dériver un produit comme le produit des dérivées : $(uv)' \neq u'v'$.
- Dériver $(\sqrt{u})'$ sans vérifier que $u > 0$: $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Astuce : avant de dériver, repère la **structure** : somme, produit, quotient, composée. Puis dérive de l'extérieur vers l'intérieur.

Oublier u' , c'est comme envoyer un colis sans l'adresse : il part, mais il n'arrive nulle part.

3. Tangente et signe de la dérivée

La **tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a (f dérivable en a) a pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Si $f' > 0$ sur un intervalle I , f est strictement croissante sur I .

Si $f' < 0$, elle est strictement décroissante.

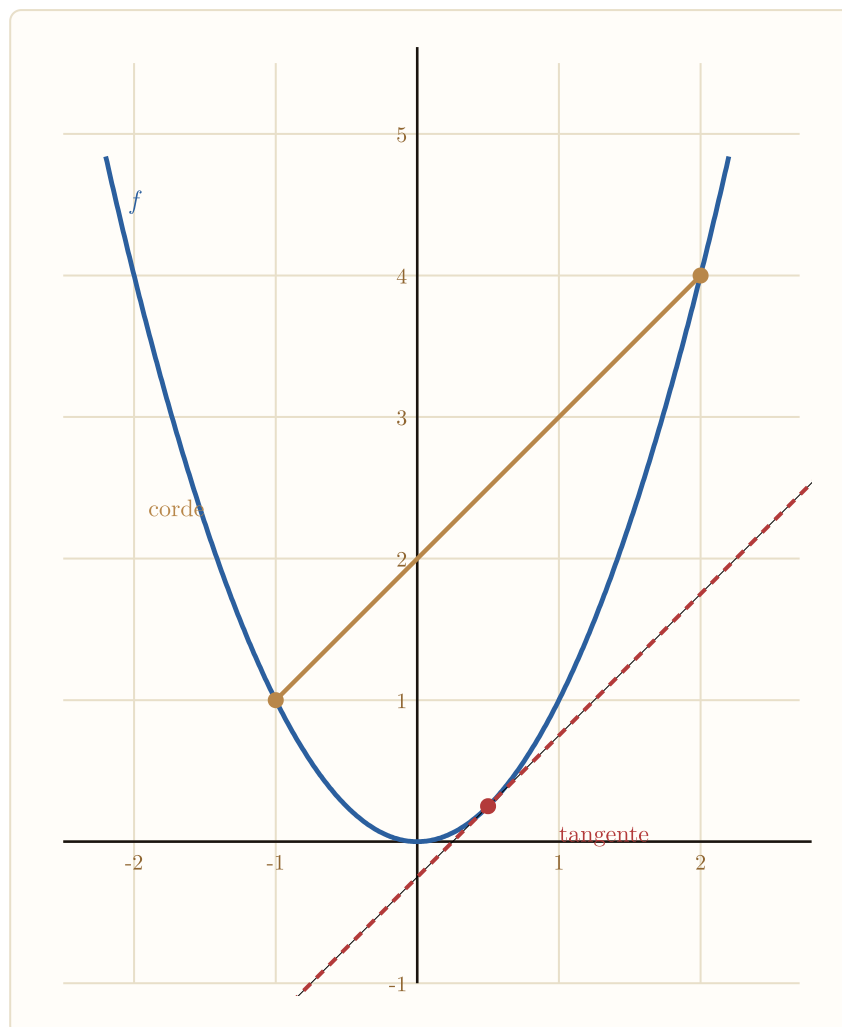
Un extremum local en a (intérieur à I) s'obtient quand f' s'annule *et change de signe*.

Piège : $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour un extremum. Pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais il n'y a pas d'extremum. Il faut un changement de signe.

Astuce : pour étudier le signe de f' , **factorise**. Un produit dont les facteurs ont un signe évident ($e^x > 0$, un carré ≥ 0 , un dénominateur > 0) se lit d'un coup d'œil.

4. Dérivée seconde et convexité

On note $f'' = (f')'$ la **dérivée seconde** de f . Une fonction dérivable sur I est :



Fonction convexe : la courbe est sous ses cordes et au-dessus de ses tangentes

- **convexe** sur I si sa courbe est **au-dessus de chacune de ses tangentes** sur I (elle « se creuse ») ;
- **concave** sur I si sa courbe est **en dessous de chacune de ses tangentes** (elle « s'arrondit »).

Théorème. Soit f deux fois dérivable sur I . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur I ;
- f' est croissante sur I ;
- $f'' \geq 0$ sur I .

De même, f est concave $\iff f'$ est décroissante $\iff f'' \leq 0$.

Point d'inflexion. C'est un point de la courbe où celle-ci **traverse sa tangente**, c'est-à-dire où la convexité change.

En pratique, en un point d'abscisse a : f'' s'annule et change de signe.

En un point d'inflexion, f' admet un extremum local.

Fonctions usuelles :

- $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$;
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0; +\infty[$;
- $x \mapsto x^3$ est concave sur $] -\infty; 0]$, convexe sur $[0; +\infty[$ (point d'inflexion en 0) ;
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $]0; +\infty[$.

Position par rapport aux cordes : une fonction convexe est en dessous de ses cordes (segments joignant deux points de la courbe).

Pièges :

- $f''(a) = 0$ ne suffit pas pour un point d'inflexion : pour $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ mais f'' ne change pas de signe, donc pas d'inflexion.
- Confondre « f' croissante » (f convexe) et « f croissante » (f' positive).
- Mélanger convexe et concave : **convexe = au-dessus des tangentes**, comme un sourire ; concave = en dessous, comme un chapeau.

Un point d'inflexion, c'est le moment où la courbe hésite et change d'avis. Sa tangente le sait bien : elle se fait traverser.

5. Méthode pour étudier la convexité

1. **Justifie** que f est deux fois dérivable (« comme somme, produit, composée... »).
2. **Calcule** f' , puis f'' , et factorise.
3. **Étudie le signe de f''** (tableau de signes si besoin).
4. **Conclus** : $f'' \geq 0$ sur $I \Rightarrow f$ convexe sur I ; $f'' \leq 0 \Rightarrow$ concave ; si f'' s'annule *en changeant de signe* en a , le point de la courbe d'abscisse a est un point d'inflexion (donne ses coordonnées).

6. Convexité et inégalités

Si f est convexe sur I , sa courbe est au-dessus de chaque tangente :

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{pour tout } x \text{ de } I$$

Si f est concave, l'inégalité est inversée. Deux inégalités à connaître :

- La tangente à la courbe de l'exponentielle en 0 est $y = x + 1$. Comme $\exp$ est convexe, $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x .
- La racine carrée est concave : la tangente en 1 est $y = \frac{x+1}{2}$. Donc $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$ pour $x \geq 0$.

Deux méthodes pour une inégalité $f(x) \geq g(x)$:

1. La **fonction auxiliaire** $h = f - g$, dont on étudie le signe grâce à ses variations (souvent un minimum égal à 0).
2. La **convexité** : la courbe est au-dessus de sa tangente.

La seconde est plus rapide quand la fonction est convexe et que la tangente est simple.

7. L'étude de fonction complète

1. **Domaine de définition**, parité éventuelle.
2. **Limites aux bornes** et asymptotes.
3. **Dérivabilité** et calcul de $f'(x)$, factorisé.
4. **Signe de f'** et tableau de variations (avec limites et valeurs remarquables).
5. **Dérivée seconde**, convexité, points d'inflexion (si demandé).
6. **Tangentes**, position relative, équations, courbe.

8. Les problèmes d'optimisation

1. **Choisir la variable** et donner son **domaine** (la contrainte physique compte : longueur positive, etc.).
2. **Exprimer la grandeur** à optimiser en fonction de cette variable.
3. **Étudier les variations** de la fonction obtenue : dérivée, signe, tableau.
4. **Conclure en contexte** : « Le volume est maximal pour $x = 5$ cm et vaut $2\,000$ cm³ ».

Piège : oublier de vérifier que la valeur trouvée est bien dans le domaine, ou de donner l'unité.

9. Les 10 pépites du chapitre

1. **Vérifie ta dérivée numériquement** avec une valeur simple ($x = 0$ ou 1) : tu détectes un facteur oublié en 10 secondes.
2. **Factorise toujours f' et f''** : c'est ce qui rend le signe lisible.
3. Avec e^x ou e^{-x} , mets l'exponentielle en facteur : elle ne change jamais le signe.
4. **f' a un extremum là où f a un point d'inflexion.**
5. Pour une **tangente**, écris les trois nombres : a , $f(a)$, $f'(a)$, puis l'équation.
6. Un point d'inflexion se donne avec ses **deux coordonnées**.
7. Pour une **inégalité**, pense à la fonction auxiliaire $h = f - g$, et à son minimum.
8. Pour un **paramètre**, traduis chaque information en équation : « passe par A » donne $f(a) = \dots$, « tangente horizontale » donne $f'(a) = 0$.
9. En **optimisation**, un extremum de la fonction n'a de sens que dans son domaine.
10. Un **tableau de variations** soigné (limites, valeurs) vaut la moitié des points d'une étude.

Complément du programme : convexité par les cordes et position des tangentes

Définition (par les cordes). Une fonction f est **convexe** sur un intervalle I si, pour tous a et b de I et tout $\lambda \in [0; 1]$:

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Géométriquement : la courbe est **au-dessous de chacune de ses cordes** (le segment qui joint deux de ses points).

Propriété. Si $f'' \geq 0$ sur I , alors la courbe de f est **au-dessus de chacune de ses tangentes**.

Démonstration. Soit $a \in I$. On pose $g(x) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)]$. Alors $g(a) = 0$ et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Comme $f'' \geq 0$, f' est croissante : $g'(x) \leq 0$ pour $x \leq a$ et $g'(x) \geq 0$ pour $x \geq a$.

Donc g décroît jusqu'en a puis croît : son minimum est $g(a) = 0$. Ainsi $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$. $\square$

Exemple. La tangente à $x \mapsto e^x$ en 0 est $y = x + 1$. Comme $(e^x)'' = e^x > 0$, on retrouve $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .

Astuce. Pour prouver une inégalité du type $f(x) \geq$ (fonction affine), pense à la **convexité** : la fonction affine est la tangente.

10. Ce qui peut tomber au bac

- Des **dérivées de composées** avec exponentielle, racine, puissance (fiche 1).
- La **convexité** : signe de f'' , points d'inflexion, lecture graphique (fiche 2).
- Une **étude de fonction complète**, avec tangente, paramètres et optimisation (fiche 3).
- Une **inégalité** par étude de fonction ou par convexité, souvent reliée à une suite (fiche 4).

Tu as maintenant le cours. Passe aux quatre fiches, aux exercices type bac, puis au Guide de rédaction du chapitre.